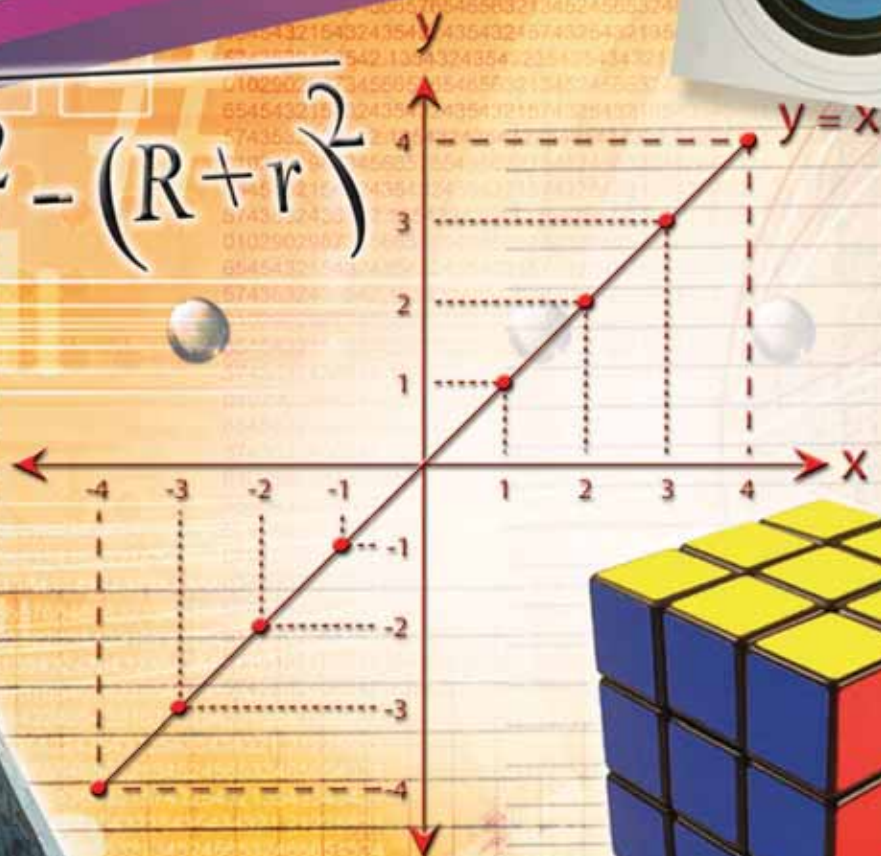
Nuniek Avianti Agus

Nuniek Avianti Agus

Mudah Belajar Matematika

untuk Kelas VIII SMP/MTs

BUKU SEKOLAH bse ELEKTRONIK

$d = \sqrt{k^2 - (R + r)^2}$

Mudah Belajar Matematika

untuk Kelas VIII
Sekolah Menengah Pertama/Madrasah Tsanawiyah

2

Nuniek Avianti Agus

Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional

Mudah Belajar Matematika

untuk Kelas VIII
Sekolah Menengah Pertama/Madrasah Tsanawiyah

MUDAH BELAJAR MATEMATIKA 2

Untuk Kelas VIII Sekolah Menengah Pertama/Madrasah Tsanawiyah

Tim Penyusun

Penulis : Nuniek Avianti Agus

Ukuran Buku : 21 x 28

510.07
AGU
M

AGUS, Nuniek Avianti
Mudah belajar matematika 2: untuk kelas viii Sekolah Menengah Pertama/Madrasah Tsanawiyah/ oleh Nuniek Avianti Agus. -- Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional, 2008.
viii, 242 hlm.: ilus.; 30 cm.

Bibliografi : hlm. 242
Indeks: hlm. 240-241

ISBN 979-462-817-4

1. Matematika-Studi dan Pengajaran I. Judul

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2007

Diperbanyak oleh ………………………………………………………

SAMBUTAN

Buku teks pelajaran ini merupakan salah satu dari buku teks pelajaran yang telah dilakukan penilaian oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 46 Tahun 2007.

Buku teks pelajaran ini telah dibeli hak ciptanya oleh Departemen Pendidikan Nasional pada tahun 2007. Saya menyampaikan penghargaan tinggi kepada para penulis buku teks pelajaran ini, yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para pendidik dan peserta didik di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini dapat diunduh (*down load*), digandakan, dicetak, dialih mediakan, atau di fotokopi oleh masyarakat. Namun untuk penggandaan yang bersifat komersial, harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah antara lain dengan harga eceran tertinggi. Diharapkan buku teks pelajaran ini akan lebih mudah dijangkau masyarakat sehingga peserta didik dan pendidik di seluruh Indonesia dapat memperoleh sumber belajar yang bermutu.

Program pengalihan/pembelian hak cipta buku teks pelajaran ini merupakan satu program terobosan yang ditempuh Pemerintah melalui Departemen Pendidikan Nasional.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini agar anak didik memperoleh kesempatan belajar dengan baik. Kepada para siswa, kami menyampaikan selamat belajar, manfaatkan buku ini sebaik-baiknya. Kepada para guru, kami menghimbau agar dapat memberdayakan buku ini seluas-luasnya bagi keperluan pembelajaran di sekolah.

Akhir kata, saya menyampaikan Selamat Mereguk Ilmu Pengetahuan Melalui Buku Teks Pelajaran Bermutu.

Jakarta, 25 Pebruari 2008
Kepala Pusat Perbukuan

Panduan Menggunakan Buku

Buku Mudah Belajar Matematika untuk Kelas VIII Sekolah Menengah Pertama/Madrasah Tsanawiyah ini merupakan buku penuntun untukmu dalam mempelajari matematika. Untuk membantumu mempelajarinya, kenalilah terlebih dahulu bagian-bagian buku ini, sebagai berikut.

1 **Gambar Pembuka Bab**

Setiap bab diawali oleh sebuah foto yang mengilustrasikan materi pengantar.

Judul Bab

Judul-Judul Subbab

Materi Pengantar

Berisi gambaran penggunaan materi yang akan dipelajari dalam kehidupan sehari-hari.

5 **Uji Kompetensi Awal**

Berisi soal-soal materi prasyarat agar kamu mudah memahami konsep pada bab tertentu.

Materi Pembelajaran

Berisi materi pokok yang disajikan secara sistematis dan menggunakan bahasa yang sederhana.

Gambar, Foto, atau Ilustrasi

Materi dalam buku ini disertai dengan gambar, foto, atau ilustrasi yang akan membantumu dalam memahami materi.

Contoh Soal

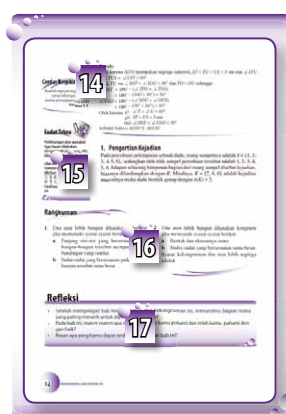
Berisi soal-soal yang disertai langkah-langkah cara menjawabnya.

Plus +

10 **Kegiatan**

Berisi kegiatan untuk menemukan sifat atau rumus.

11 **Tugas**

Berisi tugas untuk mencari informasi, berdiskusi, dan melaporkan.

12 **Solusi Matematika**

Berisi soal-soal terpilih EBTANAS, UAN, dan UN beserta pambahasannya.

Uji Kompetensi Subbab

Berisi soal-soal untuk mengukur pemahamanmu terhadap materi yang telah kamu pelajari pada subbab tertentu.

Cerdas Berpikir

Berisi soal-soal yang memiliki lebih dari satu jawaban.

Sudut Tekno

Rangkuman

Berisi ringkasan materi yang telah dipelajari.

Refleksi

Berisi pertanyaan-pertanyaan untuk mengukur pemahamanmu tentang materi yang telah dipelajari.

Problematika

Situs Matematika

Peta Konsep

Uji Kompetensi Bab

Disajikan sebagai sarana evaluasi untukmu setelah selesai mempelajari bab tertentu.

Uji Kompetensi Semester

Berisi soal-soal untukmu sebagai persiapan menghadapi Ujian Akhir Semester.

Uji Kompetensi Akhir Tahun

Berisi soal-soal dari semua materi yang telah kamu pelajari selama satu tahun.

Kunci Jawaban

Prakata

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena buku ini akhirnya dapat diselesaikan. Buku ini penulis hadirkan sebagai panduan bagi siswa dalam mempelajari matematika.

Saat ini, masih banyak siswa yang menganggap matematika sebagai pelajaran yang sulit dan membosankan. Biasanya, anggapan ini muncul karena cara penyampaian materi yang berbelit-belit dan menggunakan bahasa yang sulit dipahami.

Setelah mempelajari materi pada buku ini, siswa diharapkan memahami materi yang disajikan. Oleh karena itu, konsep yang disajikan pada buku Mudah Belajar Matematika untuk Kelas VIII Sekolah Menengah Pertama/Madrasah Tsanawiyah ini disampaikan secara logis, sistematis, dan menggunakan bahasa yang sederhana. Selain itu, buku ini juga memiliki tampilan yang menarik sehingga siswa tidak akan merasa bosan.

Akhir kata, penulis mengucapkan terima kasih pada semua pihak yang telah membantu terwujudnya buku ini. Semoga buku ini berguna dan dapat dijadikan panduan dalam mempelajari matematika. Percayalah, matematika itu mudah dan menyenangkan. Selamat belajar.

Penulis

Daftar Isi

Sumber: Science Encylopedia, 1997

Bab

1

Faktorisasi Aljabar

Masih ingatkah kamu tentang pelajaran Aljabar? Di Kelas VII, kamu telah mengenal bentuk aljabar dan juga telah mempelajari operasi hitung pada bentuk aljabar tersebut. Sekarang, kamu akan menambah pengetahuanmu tentang aljabar tersebut, khususnya mengenai faktorisasi aljabar.

Menurutmu, mengapa kamu perlu mempelajari aljabar? Mungkin kamu tidak menyadari bahwa konsep aljabar seringkali dipakai dalam kehidupan sehari-hari.

Setiap hari, Nita menabung sebesar x rupiah. Berapa besar tabungan anak tersebut setelah satu minggu? Berapa besar pula tabungannya setelah satu bulan? Setelah 10 hari, uang tabungan itu dibelikan dua buah buku yang harganya y rupiah, berapakah sisa uang tabungan Nita? Jika nilai x adalah Rp2.000,00 dan nilai y adalah Rp5.000,00, carilah penyelesaiannya.

Saat kamu mencari penyelesaian dari kasus tersebut, maka kamu sedang menggunakan konsep aljabar. Oleh karena itu, pelajarilah bab ini dengan baik

A. **Operasi Hitung Bentuk Aljabar**
B. **Pemfaktoran Bentuk Aljabar**
C. **Pecahan dalam Bentuk Aljabar**

Uji Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari materi pada bab ini, kerjakan soal-soal berikut.

1. Tentukan hasil dari:
   a. $(7x^2 + 2x + 5) + (3x^2 - 8x - 10)$
   b. $(2x^2 - 4x + 6) - (3 - 4x + 6x^2)$
2. Hitunglah:
   a. $7(2p - 3)$
   b. $5p(p + 1)$
3. Hitunglah:
   a. $(4mn)^3$
   b. $(2m^2n)^2$
4. Berapakah hasil dari $\frac{3}{p} + \frac{2}{3p}$?
5. Sederhanakanlah pecahan-pecahan berikut.
   a. $\frac{6pq}{12p}$
   b. $\frac{8xy}{2x}$
   c. $\frac{5m}{10}$

A. Operasi Hitung Bentuk Aljabar

Di Kelas VII, kamu telah mempelajari pengertian bentuk aljabar, koefisien, variabel, konstanta, suku, dan suku sejenis. Untuk mengingatkanmu kembali, pelajari contoh-contoh berikut.

1. $2pq$
2. $5x + 4$
3. $2x + 3y - 5$
4. $x^2 + 3x - 2$
5. $9x^2 - 3xy + 8$

Sekilas Matematika

Pada bentuk aljabar, suku dua disebut juga *suku binom* dan suku banyak disebut *polinom*.

Bentuk aljabar nomor (1) disebut *suku tunggal* atau suku satu karena hanya terdiri atas satu suku, yaitu $2pq$. Pada bentuk aljabar tersebut, 2 disebut koefisien, sedangkan p dan q disebut *variabel* karena nilai p dan q bisa berubah-ubah. Adapun bentuk aljabar nomor (2) disebut *suku dua* karena bentuk aljabar ini memiliki dua suku, sebagai berikut.

a. Suku yang memuat variabel x, koefisiennya adalah 5.
b. Suku yang tidak memuat variabel x, yaitu 4, disebut konstanta. Konstanta adalah suku yang nilainya tidak berubah.

Sekarang, pada bentuk aljabar nomor (3), (4), dan (5), coba kamu tentukan manakah yang merupakan koefisien, variabel, konstanta, dan suku?

1. Penjumlahan dan Pengurangan Bentuk Aljabar

Plus +

Suku sejenis adalah suku yang memiliki variabel yang sama

Pada bagian ini, kamu akan mempelajari cara menjumlahkan dan mengurangkan suku-suku sejenis pada bentuk aljabar. Pada dasarnya, sifat-sifat penjumlahan dan pengurangan yang berlaku pada bilangan riil, berlaku juga untuk penjumlahan dan pengurangan pada bentuk-bentuk aljabar, sebagai berikut.

a. Sifat Komutatif
   $a + b = b + a$, dengan a dan b bilangan riil
b. Sifat Asosiatif
   $(a + b) + c = a + (b + c)$, dengan a, b, dan c bilangan riil
c. Sifat Distributif
   $a(b + c) = ab + ac$, dengan a, b, dan c bilangan riil

Agar kamu lebih memahami sifat-sifat yang berlaku pada bentuk aljabar, perhatikan contoh-contoh soal berikut.

Contoh Soal 1.1

Sederhanakan bentuk-bentuk aljabar berikut.

a. $6mn + 3mn$
b. $16x + 3 + 3x + 4$
c. $-x - y + x - 3$
d. $2p - 3p^2 + 2q - 5q^2 + 3p$
e. $6m + 3(m^2 - n^2) - 2m^2 + 3n^2$

Jawab:

a. $6mn + 3mn = 9mn$

b. $16x + 3 + 3x + 4 = 16x + 3x + 3 + 4$
$= 19x + 7$

c. $-x - y + x - 3 = -x + x - y - 3$
$= -y - 3$

d. $2p - 3p^2 + 2q - 5q^2 + 3p = 2p + 3p - 3p^2 + 2q - 5q^2$
$= 5p - 3p^2 + 2q - 5q^2$
$= -3p^2 + 5p - 5q^2 + 2q$

e. $6m + 3(m^2 - n^2) - 2m^2 + 3n^2 = 6m + 3m^2 - 3n^2 - 2m^2 + 3n^2$
$= 6m + 3m^2 - 2m^2 - 3n^2 + 3n^2$
$= m^2 + 6m$ ■

Sekilas Matematika

Aljabar telah berkembang sejak zaman Mesir Kuno , yaitu lebih dari 3500 tahun yang lalu. Hal ini dapat dilihat pada lempengan lontar peninggalan bangsa Rhind. Orang-orang Mesir menulis permasalahan-permasalahan dalam kata-kata, mereka menggunakan kata "heap" untuk mewakili bilangan apa saja yang tidak diketahui.

Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*, 2002

Tentukan hasil dari:

a. penjumlahan $10x^2 + 6xy - 12$ dan $-4x^2 - 2xy + 10$,
b. pengurangan $8p^2 + 10p + 15$ dari $4p^2 - 10p - 5$.

Jawab:

a. $10x^2 + 6xy - 12 + (-4x^2 - 2xy + 10) = 10x^2 - 4x^2 + 6xy - 2xy - 12 + 10$
$= 6x^2 + 4xy - 2$

b. $(4p^2 - 10p - 5) - (8p^2 + 10p + 15) = 4p^2 - 8p^2 - 10p - 10p - 5 - 15$
$= -4p^2 - 20p - 20$ ■

Plus +

Penjumlahan dan pengurangan pada bentuk aljabar hanya dapat dilakukan pada suku-suku yang sejenis ■

2. Perkalian Bentuk Aljabar

Perhatikan kembali sifat distributif pada bentuk aljabar. Sifat distributif merupakan konsep dasar perkalian pada bentuk aljabar. Untuk lebih jelasnya, pelajari uraian berikut.

a. Perkalian Suku Satu dengan Suku Dua

Agar kamu memahami perkalian suku satu dengan suku dua bentuk aljabar, pelajari contoh soal berikut.

Contoh Soal 1.3

Gunakan hukum distributif untuk menyelesaikan perkalian berikut.

a. $2(x + 3)$
b. $-5(9 - y)$
c. $3x(y + 5)$
d. $-9p(5p - 2q)$

Jawab:

a. $2(x + 3) = 2x + 6$
b. $-5(9 - y) = -45 + 5y$
c. $3x(y + 5) = 3xy + 15x$
d. $-9p(5p - 2q) = -45p^2 + 18pq$ ■

b. Perkalian Suku Dua dengan Suku Dua

Agar kamu memahami materi perkalian suku dua dengan suku dua bentuk aljabar, pelajari contoh soal berikut.

Contoh Soal 1.4

Tentukan hasil perkalian suku dua berikut, kemudian sederhanakan.

a. $(x + 5)(x + 3)$ c. $(2x + 4)(3x + 1)$

b. $(x - 4)(x + 1)$ d. $(-3x + 2)(x - 5)$

Jawab:

a. $(x + 5)(x + 3) = (x + 5)x + (x + 5)3$
$= x^2 + 5x + 3x + 15$
$= x^2 + 8x + 15$

b. $(x - 4)(x + 1) = (x - 4)x + (x - 4)1$
$= x^2 - 4x + x - 4$
$= x^2 - 3x - 4$

c. $(2x + 4)(3x + 1) = (2x + 4)3x + (2x + 4)1$
$= 6x^2 + 12x + 2x + 4$
$= 6x^2 + 14x + 4$

d. $(-3x + 2)(x - 5) = (-3x + 2)x + (-3x + 2)(-5)$
$= -3x^2 + 2x + 15x - 10$
$= -3x^2 + 17x - 10$

Problematika

Seorang anak mengatakan bahwa sekarang hari ulangtahunnya, tetapi dia tidak menyebutkan usianya. Dia hanya memberi petunjuk bahwa usia ayahnya empat kali usianya, tetapi jika usianya 5 tahun yang akan datang maka usia ayahnya tiga kali usianya. Berapakah usia anak itu dan ayahnya sekarang?

Contoh Soal 1.5

Diketahui sebuah persegipanjang memiliki panjang $(5x + 3)$ cm dan lebar $(6x- 2)$ cm. Tentukan luas persegipanjang tersebut.

Jawab:

Diketahui : $p = (5x + 3)$ cm dan $l = (6x - 2)$ cm

Ditanyakan : luas persegipanjang

Luas $= p \times l$
$= (5x + 3)(6x - 2)$
$= (5x + 3)6x + (5x + 3)(-2)$
$= 30x^2 + 18x - 10x - 6$
$= 30x^2 + 8x - 6$

Jadi, luas persegipanjang tersebut adalah $(30x^2 + 8x - 6)$ cm^2 ■

Amati kembali Contoh Soal 1.4 . Ternyata perkalian dua suku bentuk aljabar $(a + b)$ dan $(c + d)$ dapat ditulis sebagai berikut.

$$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d$$
$$= ac + bc + ad + bd$$
$$= ac + ad + bc + bd$$

Secara skema, perkalian ditulis:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

(1) (2) (3) (4)

Cara seperti ini merupakan cara lain yang dapat digunakan untuk menyelesaikan perkalian antara dua buah suku bentuk aljabar. Pelajari contoh soal berikut.

Contoh Soal 1.6

Selesaikan perkalian-perkalian berikut dengan menggunakan cara skema.

a. $(x + 1)(x + 2)$ c. $(x – 2)(x + 5)$

b. $(x + 8)(2x + 4)$ d. $(3x + 4)(x – 8)$

Jawab:

a. $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 2x + x + 2$
$= x^2 + 3x + 2$

b. $(x + 8)(2x + 4) = 2x^2 + 4x + 16x + 32$
$= 2x^2 + 20x + 32$

c. $(x – 2)(x + 5) = x^2 + 5x – 2x – 10$
$= x^2 + 3x – 10$

d. $(3x + 4)(x – 8) = 3x^2 – 24x + 4x – 32$
$= 3x^2 – 20x – 32$ ■

Problematika

Sebuah kain berbentuk persegi, panjang sisinya $(x + 5)$ m. Kemudian, kain itu dipotong selebar $2x$ m. Berapakah luas sisa kain itu?

3. Pembagian Bentuk Aljabar

Pembagian bentuk aljabar akan lebih mudah jika dinyatakan dalam bentuk pecahan. Pelajarilah contoh soal berikut.

Contoh Soal 1.7

Tentukan hasil pembagian berikut.

a. $8x : 4$ c. $16a^2b : 2ab$

b. $15pq : 3p$ d. $(8x^2 + 2x) : (2y^2 – 2y)$

Jawab:

a. $8x : 4 = \frac{8x}{4} = \frac{4 \times 2 \times x}{4} = 2x$

b. $15pq : 3p = \frac{15pq}{3p} = \frac{3 \times 5 \times p \times q}{3 \times p} = 5q$

c. $16a^2b : 2ab = \frac{16a^2b}{2ab} = \frac{2 \times 8 \times a \times a \times b}{2 \times a \times b} = 8a$

d. $(8x^2+2x) : (2y^2–2y) = \frac{8x^2 + 2x}{2y^2 - 2y} = \frac{2\left(4x^2 + x\right)}{2\left(y^2 - y\right)} = \frac{4x^2 + x}{y^2 - y}$

4. Perpangkatan Bentuk Aljabar

Di Kelas VII, kamu telah mempelajari definisi bilangan berpangkat. Pada bagian ini materi tersebut akan dikembangkan, yaitu memangkatkan bentuk aljabar. Seperti yang telah kamu ketahui, bilangan berpangkat didefinisikan sebagai berikut.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{sebanyak n faktor}}$$

Untuk a bilangan riil dan n bilangan asli.

Definisi bilangan berpangkat berlaku juga pada bentuk aljabar. Untuk lebih jelasnya, pelajari uraian berikut.

a. $a^5 = a \times a \times a \times a \times a$

b. $(2a)^3 = 2a \times 2a \times 2a = (2 \times 2 \times 2) \times (a \times a \times a) = 8a^3$

c. $(-3p)^4 = (-3p) \times (-3p) \times (-3p) \times (-3p)$
$= ((-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)) \times (p \times p \times p \times p) = 81p^4$

d. $(4x^2y)^2 = (4x^2y) \times (4x^2y) = (4 \times 4) \times (x^2 \times x^2) \times (y \times y) = 16x^4y^2$

Sekarang, bagaimana dengan bentuk $(a + b)^2$? Bentuk $(a + b)^2$ merupakan bentuk lain dari $(a + b)(a + b)$. Jadi, dengan menggunakan sifat distributif, bentuk $(a + b)^2$ dapat ditulis:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b)\\ &= (a + b)a + (a + b)b\\ &= a^2 + ab + ab + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Tugas 1.1

Coba kamu uraikan bentuk $(a + b)^2$ dan $(a - b)^2$ dengan menggunakan cara skema. Apakah hasilnya sama seperti uraian sebelumnya? Laporkan hasilnya di depan kelasmu ■

Dengan cara yang sama, bentuk $(a - b)^2$ juga dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a - b)(a - b)\\ &= (a - b)a + (a - b)(-b)\\ &= a^2 - ab - ab + b^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

Contoh Soal 1.8

Tentukan hasil kuadrat dari bentuk aljabar berikut.

a. $(x + 1)^2$

b. $(2p - 3q)^2$

c. $\left(5x + \frac{1}{2}\right)^2$

d. $\left(3x - \frac{2}{3}\right)^2$

Jawab:

a. $(x + 1)^2 = (x)^2 + 2(x)(1) + (1)^2 = x^2 + 2x + 1$

b. $(2p - 3q)^2 = (2p)^2 - 2(2p)(3q) + (3q)^2 = 4p^2 - 12pq + 9q^2$

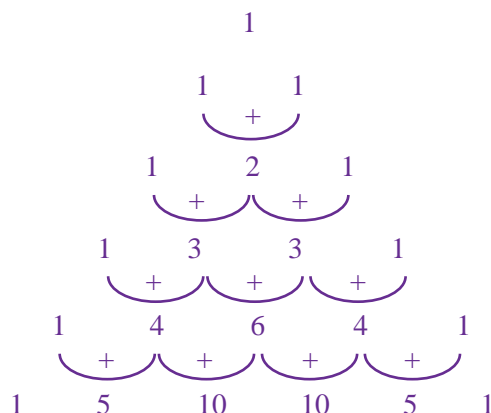
c. $\left(5x + \frac{1}{2}\right)^2 = (5x)^2 + 2(5x)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 25x^2 + 5x + \frac{1}{4}$

d. $\left(3x - \frac{2}{3}\right)^2 = (3x)^2 - 2(3x)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 9x^2 - 4x - \frac{4}{9}$ ■

Selanjutnya, akan diuraikan bentuk $(a + b)^3$, sebagai berikut.

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2\\ &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) && (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\\ &= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) && \text{(menggunakan cara skema)}\\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 && \text{(suku yang sejenis dikelompokkan)}\\ &= a^3 + 2a^2b + a^2b + ab^2 + 2ab^2 + b^3 && \text{(operasikan suku-suku yang sejenis)}\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Untuk menguraikan bentuk aljabar $(a + b)^2$, $(a + b)^3$, dan $(a + b)^4$, kamu dapat menyelesaikannya dalam waktu singkat. Akan tetapi, bagaimana dengan bentuk aljabar $(a + b)^5$, $(a + b)^6$, $(a + b)^7$, dan seterusnya? Tentu saja kamu juga dapat menguraikannya, meskipun akan memerlukan waktu yang lebih lama. Untuk memudahkan penguraian perpangkatan bentuk-bentuk aljabar tersebut, kamu bisa menggunakan pola segitiga Pascal .

Sekarang, perhatikan pola segitiga Pascal berikut.

Hubungan antara segitiga Pascal dengan perpangkatan suku dua bentuk aljabar adalah sebagai berikut.

Sebelumnya, kamu telah mengetahui bahwa bentuk aljabar $(a + b)^2$ dapat diuraikan menjadi $a^2 + 2ab + b^2$. Jika koefisien-koefisiennya dibandingkan dengan baris ketiga pola segitiga Pascal, hasilnya pasti sama, yaitu 1, 2, 1. Ini berarti, bentuk aljabar $(a + b)^2$ mengikuti pola segitiga Pascal. Sekarang, perhatikan variabel pada bentuk $a^2 + 2ab + b^2$. Semakin ke kanan, pangkat a semakin berkurang (a^2 kemudian a). Sebaliknya, semakin ke kanan pangkat b semakin bertambah (b kemudian b^2). Jadi, dengan menggunakan pola segitiga Pascal dan aturan perpangkatan variabel, bentuk-bentuk perpangkatan suku dua $(a + b)^3$, $(a + b)^4$, $(a + b)^5$, dan seterusnya dapat diuraikan sebagai berikut.

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

dan seterusnya.

Perpangkatan bentuk aljabar $(a – b)^n$ dengan n bilangan asli juga mengikuti pola segitiga Pascal. Akan tetapi, tanda setiap koefisiennya selalu

Plus+

Bilangan-bilangan yang disusun menggunakan pola segitiga Pascal memiliki pola yang unik karena selalu diawali dan diakhiri oleh angka 1. Selain itu, di dalam susunannya ada angka yang diulang

Blaise Pascal (1623–1662)

Blaise Pascal adalah seorang Prancis yang merupakan keajaiban dalam dunia matematika. Dialah yang menciptakan pola segitiga Pascal dan telah dikenal selama lebih dari 600 tahun.

Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*, 2002

Tugas 1.2

Bersama kelompok belajarmu, carilah informasi mengenai perpangkatan bentuk aljabar suku banyak. Kamu dapat mencarinya di internet atau perpustakaan. Catat hasilnya di buku tugasmu, kemudian laporkan hasilnya di depan kelas ■

berganti dari (+) ke (–), begitu seterusnya. Pelajarilah uraian berikut.

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

Contoh Soal 1.9

Uraikan perpangkatan bentuk-bentuk aljabar berikut.

a. $(x + 5)^2$ c. $(x - 2)^4$

b. $(2x + 3)^3$ d. $(3x - 4)^3$

Jawab:

a. $(x + 5)^2 = x^2 + 2(x)(5) + 5^2$
$= x^2 + 10x + 25$

b. $(2x + 3)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(3) + 3(2x)(3)^2 + 3^3$
$= 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

c. $(x - 2)^4 = x^4 - 4(x)^3(2) + 6(x)^2(2)^2 - 4(x)(2)^3 + 2^4$
$= x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$

d. $(3x - 4)^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2(4) + 3(3x)(4)^2 - (4)^3$
$= 27x^3 - 108x^2 + 144x - 64$ ■

Uji Kompetensi 1.1

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Tentukan koefisien, variabel, dan konstanta pada bentuk aljabar berikut.
   a. $3xy$
   b. $5p^2 + 5p + 5$
   c. $20a - 15b + 7c$
   d. $9x + 3y$
   e. $13m - 18$
2. Sederhanakan bentuk-bentuk aljabar berikut.
   a. $12x + x$
   b. $5y - 10y + 13y$
   c. $17a^2 + 3a + 11a^2$
   d. $6pq + 5p^2 - 8pq - p^2 + pq$
   e. $8(a + 2b) - 12(2a - b)$
3. Tentukan hasil penjumlahan berikut.
   a. $2x + 3$ dan $5 + x$
   b. $x + 2y - z$ dan $2x - y + 3z$
   c. $4 - 2(a + 3b)$ dan $5a + 3b - 2$
4. Tentukan hasil pengurangan berikut.
   a. $8p - 10$ dari $10p - 8$
   b. $m(3n + 5)$ dari $2 - 10m + 15mn$
   c. $5x(8y - 9z)$ dari $8y(5x - 9z)$
5. Diketahui $A = 3xy - 12x$ dan $B = 2x + xy$. Tentukan:
   a. $A + B$
   b. $A - 2B$
   c. $3A + 4B$
6. Tentukan hasil perkalian suku dua berikut ini, kemudian sederhanakan.
   a. $(x + 2)(x + 4)$
   b. $(2p + 5)(2p - 5)$
   c. $(4 + 2m)(m - 8)$
   d. $(10x - 3)(2x - 1)$
   e. $(7 - x)(7x - 1)$
7. Diketahui sebuah segitiga dengan alas memiliki paxnjang (5 + 3) cm daxn tinggi (2 – 2) cm. Tentukan luas segitiga tersebut (dalam x).
8. Tentukan hasil pembagian berikut.
   a. $5p^2q : pq$
   b. $2ab^2 : 6a^2b$
   c. $(8xy^2 + 2x) : 4y$
   d. $(5m^2 - 5n^2) : (m^2 - n^2)$
   e. $(24ab + 6b) : (12ab^2 - 6a)$
9. Uraikan bentuk-bentuk aljabar berikut.
   a. $(2x + 5)^3$
   b. $(-x + 8)^2$
   c. $(2x - 2y)^2$
10. Sederhanakan bentuk aljabar berikut.
    a. $(x + 4)^2 + (x - 4)^2$
    b. $(5 - y)^2 + (5y - 1)^2$
    c. $\left(\frac{1}{2}x + 2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2$

B. Pemfaktoran Bentuk Aljabar

1. Pemfaktoran dengan Sifat Distributif

Di Sekolah Dasar, kamu tentu telah mempelajari cara memfaktorkan suatu bilangan. Masih ingatkah kamu mengenai materi tersebut? Pada dasarnya, memfaktorkan suatu bilangan berarti menyatakan suatu bilangan dalam bentuk perkalian faktor-faktornya. Pada bagian ini, akan dipelajari cara-cara memfaktorkan suatu bentuk aljabar dengan menggunakan sifat distributif. Dengan sifat ini, bentuk aljabar $ax + ay$ dapat difaktorkan menjadi $a(x + y)$, di mana a adalah faktor persekutuan dari ax dan ay. Untuk itu, pelajarilah Contoh Soal 1.10.

Plus +

Faktor dari suatu bilangan adalah bilangan lain yang positif, yang dapat membagi habis bilangan tersebut. Contoh: Faktor dari 8 adalah 1, 2, 4, 8

Contoh Soal 1.10

Faktorkan bentuk-bentuk aljabar berikut.

a. $5ab + 10b$

b. $2x - 8x^2y$

c. $-15p^2q^2 + 10pq$

d. $\frac{1}{2}a^3b^2 + \frac{1}{4}a^2b^3$

Jawab:

a. $5ab + 10b$

Untuk memfaktorkan $5ab + 10b$, tentukan faktor persekutuan dari 5 dan 10, kemudian dari ab dan b. Faktor persekutuan dari 5 dan 10 adalah 5. Faktor persekutuan dari ab dan b adalah b.

Jadi, $5ab + 10b$ difaktorkan menjadi $5b(a + 2)$.

b. $2x - 8x^2y$

Faktor persekutuan dari 2 dan –8 adalah 2.

Faktor persekutuan dari x dan x^2y adalah x.

Jadi, $2x - 8x^2y = 2x(1 - 4xy)$.

c. $-15p^2q^2 + 10pq$

Faktor persekutuan dari –15 dan 10 adalah 5.

Faktor persekutuan dari p^2q^2 dan pq adalah pq.

Jadi, $-15p^2q^2 + 10pq = 5pq\,(-3pq + 2)$.

d. $\frac{1}{2}a^3b^2 + \frac{1}{4}a^2b^3$

Faktor persekutuan dari $\frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{4}$ adalah $\frac{1}{4}$.

Faktor persekutuan dari a^3b^2 adalah a^2b^3 adalah a^2b^2.

Jadi, $\frac{1}{2}a^3b^2 + \frac{1}{4}a^2b^3 = \frac{1}{4}a^2b^2\left(2\text{a} + \text{b}\right)$

Plus+

$ax + ay = a(x + y)$
$ax - ay = a(x - y)$

2. Selisih Dua Kuadrat

Perhatikan bentuk perkalian $(a + b)(a - b)$. Bentuk ini dapat ditulis

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Jadi, bentuk $a^2 - b^2$ dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian $(a + b)(a - b)$.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Bentuk $a^2 - b^2$ disebut **selisih dua kuadrat**

Contoh Soal 1.11

Faktorkan bentuk-bentuk berikut.

a. $p^2 - 4$ c. $16\,m^2 - 9n^2$

b. $25x^2 - y^2$ d. $20p^2 - 5q^2$

Jawab:

a. $p^2 - 4 = (p + 2)(p - 2)$

b. $25x^2 - y^2 = (5x + y)(5x - y)$

c. $16m^2 - 9n^2 = (4m + 3n)(4m - 3n)$

d. $20p^2 - 5q^2 = 5(4p^2 - q^2) = 5(2p + q)(2p - q)$ ■

3. Pemfaktoran Bentuk Kuadrat

a. Pemfaktoran bentuk $ax^2 + bx + c$ dengan $a = 1$

Perhatikan perkalian suku dua berikut.

$$(x + p)(x + q) = x^2 + qx + px + pq$$
$$= x^2 + (p + q)x + pq$$

Jadi, bentuk $x^2 + (p + q)x + pq$ dapat difaktorkan menjadi $(x + p)(x + q)$.

Misalkan, $x^2 + (p + q)x + pq = ax^2 + bx + c$ sehingga $a = 1$, $b = p + q$, dan $c = pq$.

Dari pemisalan tersebut, dapat dilihat bahwa p dan q merupakan faktor dari c. Jika p dan q dijumlahkan, hasilnya adalah b. Dengan demikian untuk memfaktorkan bentuk $ax^2 + bx + c$ dengan $a = 1$, tentukan dua bilangan yang merupakan faktor dari c dan apabila kedua bilangan tersebut dijumlahkan, hasilnya sama dengan b.

Agar kamu lebih memahami materi ini, pelajarilah contoh soal berikut.

Problematika

Sebuah taman berbentuk persegipanjang ukuran panjangnya $(x + 2)$ m. Lebar taman tersebut 7 m lebih pendek dari panjangnya. Jika luas taman itu 60 m^2, hitung kelilingnya ■

Contoh Soal 1.12

Faktorkanlah bentuk-bentuk berikut.

a. $x^2 + 5x + 6$ b. $x^2 + 2x - 8$

Jawab:

a. $x^2 + 5x + 6 = (x + \ldots)(x + \ldots)$

Misalkan, $x^2 + 5x + 6 = ax^2 + bx + c$, diperoleh $a = 1$, $b = 5$, dan $c = 6$.

Untuk mengisi titik-titik, tentukan dua bilangan yang merupakan faktor dari 6 dan apabila kedua bilangan tersebut dijumlahkan, hasilnya sama dengan 5.

Faktor dari 6 adalah 6 dan 1 atau 2 dan 3, yang memenuhi syarat adalah 2 dan 3 karena $2 + 3 = 5$. Jadi, $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

b. $x^2 + 2x - 8 = (x + \ldots)(x + \ldots)$

Dengan cara seperti pada (*a*), diperoleh $a = 1$, $b = 2$, dan $c = -8$.

Faktor dari 8 adalah 1, 2, 4, dan 8. Oleh karena $c = -8$, salah satu dari dua bilangan yang dicari pastilah bernilai negatif. Dengan demikian, dua bilangan yang memenuhi syarat adalah -2 dan 4, karena $-2 \times 4 = -8$ dan $-2 + 4 = 2$. Jadi, $x^2 + 2x - 8 = (x + (-2))(x + 4) = (x - 2)(x + 4)$ ■

b. Pemfaktoran Bentuk $ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 1$

Sebelumnya, kamu telah memfaktorkan bentuk $ax^2 + bx + c$ dengan $a = 1$. Sekarang kamu akan mempelajari cara memfaktorkan bentuk $ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 1$.

Perhatikan perkalian suku dua berikut.

$(x + 3)(2x + 1) = 2x^2 + x + 6x + 3$
$= 2x^2 + 7x + 3$

Dengan kata lain, bentuk $2x^2 + 7x + 3$ difaktorkan menjadi $(x + 3)(2x + 1)$. Adapun cara memfaktorkan $2x^2 + 7x + 3$ adalah dengan membalikkan tahapan perkalian suku dua di atas.

$2x^2 + 7x + 3 = 2x^2 + (x + 6x) + 3$ (uraikan $7x$ menjadi penjumlahan dua suku yaitu pilih (x + 6x)
$= (2x^2 + x) + (6x + 3)$
$= x(2x + 1) + 3(2x + 1)$ (Faktorkan menggunakan sifat distributif)
$= (x + 3)(2x+1)$

Dari uraian tersebut dapat kamu ketahui cara memfaktorkan bentuk $ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 1$ sebagai berikut.

1) Uraikan bx menjadi penjumlahan dua suku yang apabila kedua suku tersebut dikalikan hasilnya sama dengan $(ax^2)(c)$.
2) Faktorkan bentuk yang diperoleh menggunakan sifat distributif ■

Plus +

Pada pemfaktoran $2x^2 + 7x + 3$, suku $7x$ diuraikan menjadi $1x$ dan $6x$, karena, $1x + 6x = 7x$ dan $(x)(6x) = (2x^2)(3)$ ■

Contoh Soal 1.13

Faktorkan bentuk-bentuk berikut.

a. $2x^2 + 11x + 12$ b. $6x^2 + 16x + 18$

Jawab:

a. $2x^2 + 11x + 12 = 2x^2 + 3x + 8x + 12$ (Uraikan 11x menjadi penjumlahan dua suku)
$= (2x^2 + 3x) + (8x + 12)$
$= x(2x + 3) + 4(2x + 3)$ (Faktorkan menggunakan sifat distributif)
$= (x + 4)(2x + 3)$

Jadi, $2x^2 + 11x + 12 = (x + 4)(2x + 3)$.

b. $6x^2 + 16x + 8 = 6x^2 + 4x + 12x + 8$
$= (6x^2 + 4x) + (12x + 8)$
$= 2x(3x + 2) + 4(3x + 2)$
$= (2x + 4)(3x + 2)$

Jadi, $6x^2 + 16x + 8 = (2x + 4)(3x +2)$ ■

Plus +

Pada pemfaktoran $2x^2 + 11x + 12$, suku $11x$ diuraikan menjadi $3x$ dan $8x$, karena, $3x + 8x = 11x$ dan $(3x)(8x) = (2x^2)(12)$ ■

Plus +

Pada pemfaktoran $6x^2 + 16x + 8$, suku $16x$ diuraikan menjadi $4x$ dan $12x$, karena, $4x + 12x = 16x$ dan $(4x)(12x) = (6x^2) \times (8)$ ■

Uji Kompetensi 1.2

Kerjakanlah soal-soal berikut

1. Dengan memisahkan faktor persekutuannya, faktorkan bentuk aljabar berikut.
   a. $4a + 12$ e. $22xyz^2 + 88xy$
   b. $10p^2 + 25p$ f. $14pq - 21pq^2r$
   c. $13x^2y - \frac{1}{13}y^2$ g. $3x^2yz^2 + 6xy^2z + 2xyz$
   d. $\frac{1}{9}p^2q^2 + \frac{1}{27}p$ h. $9a^3b^3 + 27a^2b^2 - 4ab^3$
2. Faktorkan dan sederhanakan bentuk-bentuk berikut.
   a. $x^2 - 49$ c. $x^2 - 1$
   b. $4x^2 - y^2$ d. $a^4 - 16$
   f. $2r^4 - 8$ g. $(m + n)^2 - 9$
   e. $p^4 - q^4$ h. $(2x + 1)^2 - (2x - 1)^2$
3. Faktorkan bentuk-bentuk aljabar berikut.
   a. $x^2 + 2x + 1$ e. $x^2 - x - 56$
   b. $x^2 - x - 6$ f. $x^2 + 8x + 15$
   c. $x^2 + 11x + 30$ g. $x^2 + 3x - 28$
   d. $x^2 - 7x + 10$ h. $x^2 + 12x + 27$
4. Faktorkan bentuk-bentuk aljabar berikut.
   a. $2x^2 + 11 + 15$ e. $5 + 17x + 6x^2$
   b. $2x^2 - 5x - 12$ f. $2x^2 + 6x - 20$
   c. $3x^2 + 10x + 3$ g. $4x^2 + 11x - 3$
   d. $16 - 34x + 4x^2$ h. $-16 + 10x + 6x^2$

C. Pecahan dalam Bentuk Aljabar

1. Penjumlahan dan Pengurangan Pecahan Bentuk Aljabar

Di Kelas VII, kamu telah mempelajari cara menjumlahkan dan mengurangkan pecahan. Pada bagian ini, materi tersebut dikembangkan sampai dengan operasi penjumlahan dan pengurangan pecahan bentuk aljabar.

Cara menjumlahkan dan mengurangkan pecahan bentuk aljabar adalah sama dengan menjumlahkan dan mengurangkan pada pecahan biasa, yaitu dengan menyamakan penyebutnya terlebih dahulu. Agar kamu lebih memahami materi ini, pelajari contoh-contoh soal berikut.

Contoh Soal 1.14

Sederhanakan bentuk-bentuk penjumlahan berikut.

a. $\frac{2}{x}+\frac{2}{x}$

b. $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}$

c. $\frac{2x}{5}+\frac{5}{2x}$

d. $\frac{3-x}{5}+\frac{x+3}{x}$

e. $\frac{2x+1}{x+2}+\frac{2x-1}{x-2}$

Jawab:

a. $\frac{2}{x}+\frac{2}{x}=\frac{2+2}{x}=\frac{4}{x}$

b. $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=\frac{3y+4x}{xy}$

c. $\frac{2x}{5}+\frac{5}{2x}=\frac{(2x)(2x)+5(5)}{5(2x)}=\frac{4x^2+25}{10x}$

d. $\frac{3-x}{5}+\frac{x+3}{x}=\frac{(3-x)x+(x+3)5}{5x}$

$=\frac{3x-x^2+5x+15}{5x}=\frac{-x^2+8x+15}{5x}$

e. $\frac{2x+1}{x+2}+\frac{2x-1}{x-2}=\frac{(2x+1)(x-2)+(2x-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{(2x^2-4x+x-2)+(2x^2+4x-x-2)}{x^2-2x+2x-4}$

$=\frac{2x^2+2x^2-4x+x+4x-x-2-2}{x^2-4}=\frac{4x^2-4}{x^2-4}$ ■

Solusi Matematika

Hasil dari $\frac{3}{x+3}-\frac{1}{2x-1}$ adalah ....

a. $\frac{5x-6}{(x+3)(2x-1)}$

b. $\frac{7x-6}{(x+3)(2x-1)}$

c. $\frac{7x}{(x+3)(2x-1)}$

d. $\frac{5x}{(x+3)(2x-1)}$

Jawab:

$\frac{3}{x+3}-\frac{1}{2x-1}$

$=\frac{3(2x-1)-(x+3)}{(x+3)(2x-1)}$

$=\frac{(6x-3)-(x+3)}{(x+3)(2x-1)}$

$=\frac{5x-6}{(x+3)(2x-1)}$

Jawaban: a

UAN SLTP, 2002

Contoh Soal 1.15

Sederhanakan bentuk-bentuk pengurangan pecahan berikut.

a. $\frac{10}{m}-\frac{8}{m}$

b. $\frac{9}{p}-\frac{10}{q}$

c. $\frac{5x}{8}-\frac{1}{7x}$

d. $\frac{y-6}{9}-\frac{y+4}{y}$

e. $\frac{3x+6}{2-x}-\frac{x-2}{x+5}$

Jawab:

a. $\frac{10}{m} - \frac{8}{m} = \frac{10-8}{m} = \frac{2}{m}$

b. $\frac{9}{p} - \frac{10}{q} = \frac{9q - 10p}{pq}$

c. $\frac{5x}{8} - \frac{1}{7x} = \frac{(5x)(7x) - 1(8)}{8(7x)} = \frac{35x^2 - 8}{56x}$

d. $\frac{y-6}{9} - \frac{y+4}{y} = \frac{(y-6)y - (y+4)9}{9y}$

$= \frac{y^2 - 6y - 9y - 36}{9y}$

$= \frac{y^2 - 15y - 36}{9y}$

e. $\frac{3x+6}{2-x} - \frac{x-2}{x+5} = \frac{(3x+6)(x+5) - (x-2)(2-x)}{(2-x)(x+5)}$

$= \frac{(3x^2 + 15x + 6x + 30) - (2x - x^2 - 4 + 2x)}{2x + 10 - x^2 - 5x}$

$= \frac{3x^2 + x^2 + 15x + 6x - 2x - 2x + 30 + 4}{-x^2 - 3x + 10}$

$= \frac{4x^2 + 17x + 34}{-x^2 - 3x + 10}$ ■

2. Perkalian dan Pembagian Pecahan Bentuk Aljabar

a. Perkalian

Cara mengalikan pecahan bentuk aljabar sama dengan mengalikan pecahan biasa, yaitu

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{ac}{bd} \text{ dengan } b \neq 0 \text{ dan } d \neq 0$$

Agar kamu lebih memahami materi perkalian pecahan bentuk aljabar, pelajari contoh soal berikut.

Contoh Soal 1.16

Sederhanakan bentuk-bentuk perkalian berikut.

a. $\frac{2}{p} \times \frac{5}{p}$

b. $\frac{9}{y} \times \frac{9}{18x}$

c. $\frac{12m}{8} \times \frac{2}{24m}$

d. $\frac{3+x}{7} \times \frac{x-6}{x}$

e. $\frac{5x-6}{x-1} \times \frac{8}{x+7}$

Jawab:

a. $\frac{2}{p} \times \frac{5}{p} = \frac{2 \times 5}{p \times p} = \frac{10}{p^2}$

b. $\frac{9}{y} \times \frac{9}{18x} = \frac{9 \times 9}{y \times 18x} = \frac{81}{18xy} = \frac{9}{2xy}$

Solusi Matematika

Bentuk paling sederhana dari $\frac{2x^2 - 5x - 12}{4x^2 - 9}$ adalah ....

a. $\frac{x+4}{2x-3}$

b. $\frac{x-4}{2x-3}$

c. $\frac{x+4}{2x+9}$

d. $\frac{x-4}{2x-9}$

Jawab:

$\frac{2x^2 - 5x - 12}{4x^2 - 9}$

$= \frac{(2x+3)(x-4)}{(2x+3)(2x-3)}$

$= \frac{x-4}{2x-3}$

Jadi, bentuk sederhana dari $\frac{2x^2 - 5x - 12}{4x^2 - 9}$ adalah $\frac{x-4}{2x-3}$.

Jawaban: b

UN SMP, 2007

c. $\frac{12m}{8} \times \frac{2}{24m} = \frac{12m \times 2}{8 \times 24m} = \frac{24m}{192m} = \frac{1}{8}$

d. $\frac{3+x}{7} \times \frac{x-6}{x} = \frac{(3+x)(x-6)}{7x}$

$= \frac{3x - 18 + x^2 - 6x}{7x}$

$= \frac{x^2 - 3x - 18}{7x}$

e. $\frac{5x-6}{x-1} \times \frac{8}{x+7} = \frac{(5x-6)8}{(x-1)(x+7)}$

$= \frac{40x - 48}{x^2 + 7x - x - 7}$

$= \frac{40x - 48}{x^2 + 6x - 7}$

b. Pembagian

Aturan pembagian pada pecahan bentuk aljabar sama dengan aturan pembagian pada pecahan biasa, yaitu :

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \text{ dengan } b \neq 0, c \neq 0, \text{ dan, } d \neq 0$$

Contoh Soal 1.17

a. $\frac{15}{x} : \frac{5}{x}$

b. $\frac{12}{p} : \frac{23}{p}$

c. $\frac{2m}{3} : 4$

d. $\frac{x+2}{7} : \frac{x-10}{4}$

e. $\frac{12y+5}{1+x} : \frac{4y}{5x-2}$

Jawab:

a. $\frac{15}{x} : \frac{5}{x} = \frac{15}{x} \times \frac{x}{5} = \frac{15x}{5x} = 3$

b. $\frac{12}{p} : \frac{23}{p} = \frac{12}{p} \times \frac{p}{23} = \frac{12p}{23p} = \frac{12}{23}$

c. $\frac{2m}{3} : 4 = \frac{2m}{3} : \frac{4}{1} = \frac{2m}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2m}{12} = \frac{m}{6}$

d. $\frac{x+2}{7} : \frac{x-10}{4} = \frac{x+2}{7} \times \frac{4}{x-10} = \frac{(x+2)4}{7(x-10)} = \frac{4x+8}{7x-}$

e. $\frac{12y+5}{1+x} : \frac{4y}{5x-2} = \frac{12y+5}{1+x} \times \frac{5x-2}{4y} = \frac{(12y+5)(5x-2)}{(1+x)4y}$

$= \frac{60xy - 24y + 25x - 10}{4y + 4}$

3. Perpangkatan Pecahan Bentuk Aljabar

Pada bagian sebelumnya, kamu telah mengetahui bahwa untuk a bilangan riil dan n bilangan asli, berlaku:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{sebanyak } n \text{ faktor}}$$

Definisi bilangan berpangkat tersebut berlaku juga pada pecahan bentuk aljabar. Untuk lebih jelasnya, pelajari uraian berikut.

a. $\left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1^2}{a^2} = \frac{1}{a^2}$

b. $\left(\frac{xy}{2}\right)^3 = \frac{(xy)^3}{2^3} = \frac{x^3y^3}{8}$

c. $\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^2 = \frac{(x+2)^2}{(x-3)^2} = \frac{(x+2)(x+2)}{(x-3)(x-3)} = \frac{x^2+2x+2x+4}{x^2-3x-3x+9} = \frac{x^2+4x+4}{x^2-6x+9}$

Contoh Soal 1.18

Sederhanakan bentuk-bentuk perpangkatan berikut.

a. $\left(\frac{x^2y}{z}\right)^4$

b. $\left(\frac{2p}{3q+1}\right)^2$

c. $\left(\frac{-3mn}{2m+2n}\right)^3$

d. $\left(\frac{2x^2+3}{x^3}\right)^2$

e. $\left(\frac{2r^2+4}{3-5s^2}\right)^2$

Jawab:

a. $\left(\frac{x^2y}{z}\right)^4 = \frac{(x^2y)^4}{z^4} = \frac{x^8y^4}{z^4}$

b. $\left(\frac{2p}{3q+1}\right)^2 = \frac{(2p)^2}{(3q+1)^2} = \frac{4p^2}{(3q+1)(3q+1)} = \frac{4p^2}{9q^2+3q+3q+1} = \frac{4p^2}{9q^2+6q+1}$

c. $\left(\frac{-3mn}{2m+2n}\right)^3 = \frac{(-3mn)^3}{(2m+2n)^3} = \frac{-27m^3n^3}{(2m+2n)(2m+2n)(2m+2n)}$

$$= \frac{-27m^3n^3}{(4m^2+4mn+4mn+4n^2)(2m+2n)}$$

$$= \frac{-27m^3n^3}{(4m^2+8mn+4n^2)(2m+2n)}$$

$$= \frac{-27m^3n^3}{8m^3+8m^2n+16m^2n+16mn^2+8mn^2+8n^3}$$

$$= \frac{-27m^3n^3}{8m^3+24m^2n+24mn^2+8n^3}$$

d. $\left(\frac{2x^2+3}{x^3}\right)^2 = \frac{(2x^2+3)^2}{(x^3)^2} = \frac{(2x^2+3)(2x^2+3)}{x^6}$

$$= \frac{4x^4+6x^2+6x^2+9}{x^6}$$

$$= \frac{4x^4+12x^2+9}{x^6}$$

e. $\left[\dfrac{2r^2+4}{3-5s^2}\right]^2 = \dfrac{(2r^2+4)^2}{(3-5s^2)^2} = \dfrac{(2r^2+4)(2r^2+4)}{(3-5s^2)(3-5s^2)}$

$$= \frac{4r^4+8r^2+8r^2+16}{9-15s^2-15s^2+25s^4}$$

$$= \frac{4r^4+16r^2+16}{9-30s^2+25s^4}$$

4. Penyederhanaan Pecahan Bentuk Aljabar

Masih ingatkah kamu materi penyederhanaan pecahan yang telah dipelajari di Kelas VII? Coba jelaskan dengan menggunakan kata-katamu sendiri. Sekarang kamu akan mempelajari cara menyederhanakan pecahan bentuk aljabar. Untuk itu, pelajari uraian berikut ini.

a. $\dfrac{5x}{10}$

Untuk menyederhanakan bentuk $\dfrac{5x}{10}$, tentukan faktor persekutuan dari pembilang dan penyebutnya. Kemudian, bagilah pembilang dan penyebutnya dengan faktor persekutuan tersebut.

Faktor persekutuan dari $5x$ dan 10 adalah 5.

Jadi, $\dfrac{5x}{10} = \dfrac{5x:5}{10:5} = \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}x$

b. $\dfrac{9p}{27q}$

Faktor persekutuan dari $9p$ dan $27q$ adalah 9.

Jadi, $\dfrac{9p}{27q} = \dfrac{9p:9}{27q:9} = \dfrac{p}{3q}$

c. $\dfrac{x+1}{x^2+3x+2}$

Untuk menyederhanakan bentuk $\dfrac{x+1}{x^2+3x+2}$, tentukan faktor penyebutnya sehingga $\dfrac{x+1}{x^2+3x+2} = \dfrac{x+1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{x+2}$

Jadi, $\dfrac{x+1}{x^2+3x+2} = \dfrac{1}{x+2}$

Agar kamu lebih memahami materi penyederhanaan pecahan bentuk aljabar, pelajari contoh soal berikut.

Contoh Soal 1.19

Sederhanakan pecahan-pecahan berikut.

a. $\dfrac{6}{18y}$

b. $\dfrac{17x^2}{xy^2}$

c. $\dfrac{m}{mn+2m}$

d. $\dfrac{14p+7q}{4p+2q}$

e. $\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-x-12}$

Solusi Matematika

Bentuk $\dfrac{2x^2-x-15}{16x^4-625}$ disederhanakan menjadi ....

a. $\dfrac{x+3}{(2x-5)(4x^2-25)}$

b. $\dfrac{x-3}{(2x+5)(4x^2+25)}$

c. $\dfrac{x+3}{(2x-5)(4x^2+25)}$

d. $\dfrac{x-3}{(2x-5)(4x^2+25)}$

Jawab:

$\dfrac{2x^2-x-15}{16x^4-625} = \dfrac{2x^2-x-15}{(4x^2)^2-(25)^2}$

$= \dfrac{(2x+5)(x-3)}{(4x^2+25)(4x^2-25)}$

$= \dfrac{(2x+5)(x-3)}{(4x^2+25)(2x+5)(2x-5)}$

$= \dfrac{(x-3)}{(4x^2+25)(2x-5)}$

Jawaban: d

UAN SLTP, 2003

Jawab:

a. $\frac{6}{18y} = \frac{6:6}{18y:6} = \frac{1}{3y}$

b. $\frac{17x^2}{xy^2} = \frac{17 \cdot x \cdot x}{x \cdot y \cdot y} = \frac{17x}{y^2}$

c. $\frac{m}{mn+2m} = \frac{m}{m(n+2)} = \frac{1}{n+2}$

d. $\frac{14p+7q}{4p+2q} = \frac{7(2p+q)}{2(2p+q)} = \frac{7}{2}$

e. $\frac{x^2+5x+6}{x^2-x-12} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x-4)(x+3)} = \frac{x+2}{x-4}$

Uji Kompetensi 1.3

Kerjakanlah soal-soal berikut .

1. Sederhanakan bentuk-bentuk penjumlahan berikut.
   a. $\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}$
   b. $\frac{1}{5a}+\frac{1}{a}$
   c. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$
   d. $\frac{2x}{m}+\frac{3y}{n}$
   e. $\frac{x+1}{x}+\frac{x}{1-x}$
   f. $\frac{5m+3}{2n}+\frac{3+m}{n}$
   g. $\frac{r+8}{r+1}+\frac{r+6}{r+2}$
   h. $\frac{2x}{10x-3}+\frac{2x+4}{9x+1}$
2. Sederhanakan bentuk-bentuk pengurangan berikut.
   a. $\frac{17}{5}-\frac{6}{x}$
   b. $\frac{7}{3x}-\frac{1}{x}$
   c. $\frac{p}{q}-\frac{q}{p}$
   d. $\frac{5x}{8y}-\frac{x}{4y}$
   e. $\frac{x+5}{3}-\frac{9}{8-x}$
   f. $\frac{2s}{6r+1}-\frac{s}{8r-3}$
   g. $\frac{x-5}{4}-\frac{2+x}{4x}$
   h. $\frac{11y+3}{4y-1}-\frac{y-9}{3y+3}$
3. Tentukan hasil perkalian berikut.
   a. $\frac{8}{p}\times\frac{p}{3}$
   b. $\frac{12}{5x}\times\frac{1}{x^2}$
   c. $\frac{7xy}{9}\times\frac{2y}{x}$
   d. $\frac{x+1}{8}\times\frac{5}{3x}$
   e. $\frac{5y-8}{3xy}\times\frac{11}{2x+1}$
   f. $\frac{-5mn}{m^2}\times\frac{14}{n}$
   g. $\frac{a^2-b}{4a}\times\frac{3a-b^2}{b}$
   h. $\frac{x^2+x+1}{2x+10}\times\frac{x+4}{2x}$
4. Uraikan perpangkatan pecahan bentuk aljabar berikut.
   a. $\left(\frac{2}{3b}\right)^2$
   b. $\left(\frac{15a}{13a^2b}\right)^3$
   c. $\left(\frac{-2p}{q+1}\right)^2$
   d. $\left(\frac{m+n}{3n}\right)^3$
   e. $\left(\frac{4a-1}{b-2}\right)^3$
   f. $\left(\frac{2x^2+4}{x}\right)^3$
   g. $\left(\frac{p^2-q^2}{5p+q}\right)^2$
   h. $\left(\frac{a+1}{x+y}\right)^4$
5. Tentukan hasil pembagian berikut.
   a. $\frac{9m}{3}:\frac{m}{3}$
   b. $\frac{22xy}{8}:\frac{x}{4}$
   c. $\frac{13x^3}{y^2}:\frac{x}{y^3}$
   d. $\frac{a+1}{3}:\frac{a-1}{6a}$
   e. $\frac{5p+8}{3pq}:\frac{p^2q}{pq^2}$
   f. $\frac{-12r}{r^2+1}:\frac{r+1}{r}$
   g. $\frac{3x+1}{x-1}:\frac{3x-1}{x+1}$
   h. $\frac{3x^2-8x+1}{2x}:\frac{4x+1}{2x}$
6. Sederhanakan pecahan-pecahan berikut.
   a. $\frac{8y}{y}$
   b. $\frac{15a^2b}{3b^2}$
   c. $\frac{q^2}{pq+q^2}$
   d. $\frac{2x+4}{2y}$
   e. $\frac{9a-3}{3-6y}$
   f. $\frac{x+3}{x^2+7x+12}$
   g. $\frac{a^2-b^2}{b-a}$
   h. $\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

Rangkuman

1. Penjumlahan dan pengurangan bentuk aljabar dilakukan pada suku-suku yang sejenis.
2. Perkalian suku dua bentuk aljabar dengan cara skema, yaitu:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

3. Rumus perpangkatan suku dua bentuk aljabar adalah :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

4. Perpangkatan suku dua bentuk aljabar dapat dilakukan dengan menggunakan pola segitiga Pascal.
5. Rumus pemfaktoran suku dua bentuk aljabar adalah:
   a. Sifat distributif

   $$ax + ay = a(x + y)$$

   b. Selisih dua kuadrat

   $$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$$

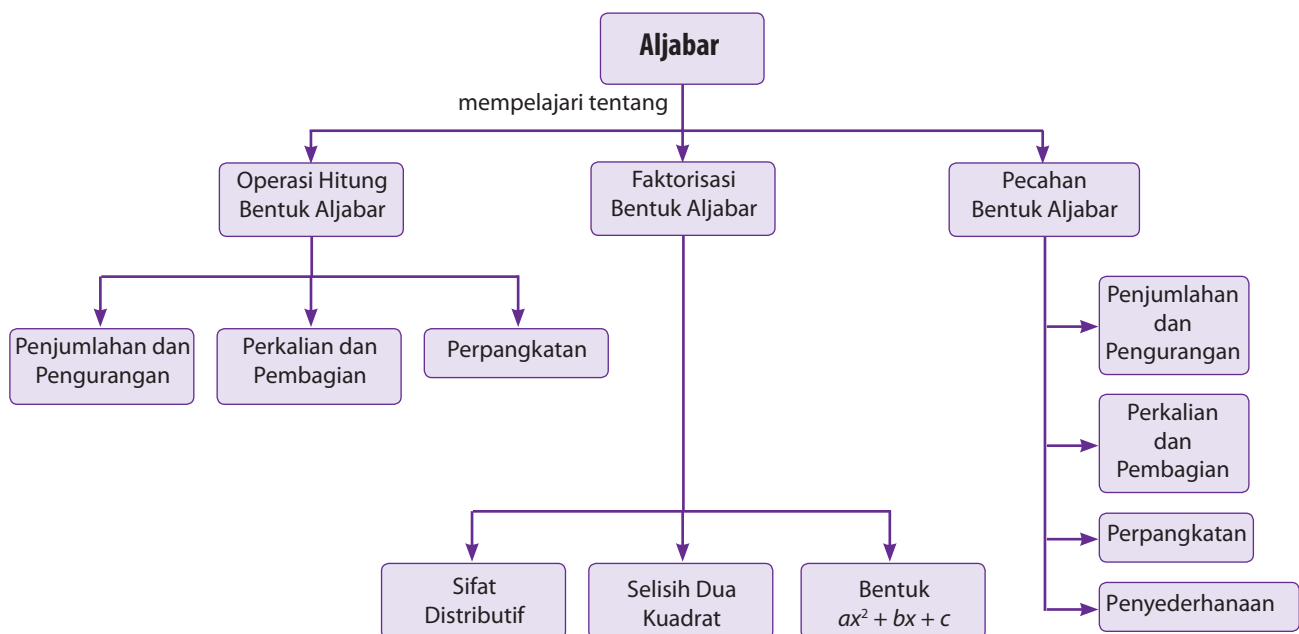
   c. Pemfaktoran bentuk $ax^2 + bx + c$ dengan $a = 1$

   $$ax^2 + bx + c = x^2 + (p + q)x + pq = (x + p)(x + q)$$

6. Menyederhanakan pecahan bentuk aljabar, adalah dengan membagi pembilang dan penyebut dengan faktor persekutuan dari pembilang dan penyebut tersebut

Refleksi

- Pada bab Faktorisasi Aljabar ini, adakah materi yang menurutmu sulit untuk kamu pahami?
- Pada bab ini, bagian mana yang paling menarik untuk dipelajari? Mengapa?
- Kesan apakah yang kamu dapatkan setelah mempelajari materi bab ini?

Peta Konsep

Uji Kompetensi Bab 1

A. Pilihlah salah satu jawaban yang benar.

1. Banyak suku pada bentuk aljabar
   $a^2 - 2ab + 3c + 4ab - 8c^2$ adalah ....
   a. 3 c. 5
   b. 4 d. 6
2. Jika bentuk aljabar 12 $x^2 + 5x^2y - 10xy^2 + 6y^2$ maka koefisien dari x^2y adalah ....
   a. 12 c. –10
   b. 5 d. 6
3. Pada bentuk-bentuk aljabar berikut, yang memiliki dua suku sejenis adalah ....
   a. $3a^2 + 3ab - 8ab + b^2$
   b. $8a^2 + 8a^2b + 3ab^2 + b^2$
   c. $a^2 + a^2b - ab^2 + b^2$
   d. $a^2 - 5a^2b - ab^2 + a^2b^2 - b^2$
4. Bentuk sederhana dari $3p + 9q - 7p + 2q$ adalah ....
   a. $-4p - 11q$ c. $-4p + 11q$
   b. $4p + 11q$ d. $4p - 11q$
5. $(9p + 8q - r) + (12p - 3q + 5r) =$ ....
   a. $21p + 11q + 6r$ c. $21p + 11q + 4r$
   b. $21p + 5q + 4r$ d. $21p + 5q + 6r$
6. $(11x - 13y + z) - (10x - 13y - z) =$ ....
   a. $x - 26y + 2z$ c. $x + 2z$
   b. $x - 26y$ d. x
7. Hasil pengurangan $3x + 2y$ dari $4x^2 + 2y - 9z$ adalah ....
   a. $x^2 + 3x + 9z$ c. $3x + 9z$
   b. $4x^2 + 2y - 9z$ d. $4x^2 - 3x - 9z$
8. Hasil penyederhanaan dari $3x^2 + 4x - 2xy - 2x^2 - x + 2xy$ adalah ....
   a. $x^2 + 3x$ c. $5x^2 - 5x$
   b. $x^2 - 3x$ d. $5x^2 + 5x$
9. Hasil penyederhanaan bentuk $2(x + 3) + 4(x - 2)$ adalah ....
   a. $6x + 2$ c. $2x + 8$
   b. $6x - 2$ d. $2x - 8$
10. Hasil dari $9x(3x + 4)$ adalah ....
    a. $27x + 9x$ c. $27x^2 + 36x$
    b. $27x + 36$ d. $27x^2 + 12x$
11. Hasil dari $20m^4 : 5m^2$ adalah ....
    a. $4m^2$ c. $5m^4$
    b. $-4m^2$ d. $-5m^2$
12. Jika $a = 5$ dan $b = -2$, nilai dari $a^2b + ab^2$ adalah ....
    a. –30 c. –20
    b. 30 d. 20
13. Jika $x = a - b + c$ dan $y = 2a + b - c$ maka nilai dari $2x - 3y$ adalah ....
    a. $4a + 3b - 3c$ c. $4a - 3b + 3c$
    b. $-4a + 3b - 3c$ d. $-4a - 3b + 3c$
14. Hasil kali $(x + 3)(x - 8)$ adalah ....
    a. $x^2 + 5x - 24$ c. $x^2 - 5x - 24$
    b. $x^2 - 8x + 3$ d. $x^2 + 8x - 3$
15. Faktor dari $x^2 - 4x - 21$ adalah ....
    a. $(x + 2)(x - 8)$ c. $(x + 3)(x - 7)$
    b. $(x - 3)(x + 7)$ d. $(x - 2)(x + 8)$
16. Faktor dari $3x^2 - 13x - 10$ adalah ....
    a. $(x - 5)(3x + 2)$ c. $(x + 5)(3x - 2)$
    b. $(x + 5)(3x + 4)$ d. $(x + 5)(3x - 4)$
17. $\frac{15p}{20} + \frac{9p}{15} =$ ....
    a. $\frac{24p}{20}$ c. $\frac{27p}{20}$
    b. $\frac{25p}{20}$ d. $\frac{28p}{20}$
18. Bentuk sederhana dari $\frac{5}{x+3} + \frac{6}{x+4}$ adalah ....
    a. $\frac{11x+7}{x^2+7x+12}$ c. $\frac{11x+23}{x^2+7x+12}$
    b. $\frac{11x+9}{x^2+7x+12}$ d. $\frac{11x+28}{x^2+7x+12}$
19. Bentuk sederhana dari $\left(\frac{12a^2bc}{4ab^2}\right)^2$ adalah ....
    a. $\frac{18a^2b^2}{c^2}$ c. $\frac{18a^2c^2}{b^2}$
    b. $\frac{9a^2c^2}{b^2}$ d. $\frac{9a^2b^2}{c^2}$
20. Bentuk sederhana dari $\frac{x+5}{-9} - \frac{x-3}{x+3}$ adalah ....
    a. $\frac{-x^2+7x-4}{x^2-9}$ c. $\frac{-x^2+7x+4}{x^2-9}$
    b. $\frac{-x^2+7x-13}{x^2-9}$ d. $\frac{-x^2+5x+4}{x^2-9}$

B. Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Sederhanakan bentuk-bentuk aljabar berikut.
   a. $5x^2 + 3x - 9x^2 + 3x$
   b. $7x + 8 - (-3 + 10x)$
   c. $2(x + 5) + 5(9 - x)$
   d. $(2x + 8)^2$
   e. $(10 - 14x)^2$
2. Jika $a = 2x$, $b = 7y$, dan $c = -9z$, maka tentukan nilai dari:
   a. $a + b + c$
   b. $2a^2 + 3b - c^2$
   c. $2a + 3(b + c)^2$
   d. $a^2b^2c^2 : 2(a - b)$
3. Faktorkan bentuk-bentuk aljabar berikut.
   a. $x^2 + 2x - 3$
   b. $x^2 - 19x + 18$
   c. $-x^2 - 5x + 14$
   d. $2x^2 + 11x + 12$
   e. $3x^2 - 29x + 40$
4. Sederhanakan bentuk-bentuk aljabar berikut.
   a. $\frac{2}{x} + \frac{x+1}{5}$
   b. $\frac{x-2}{2y} - \frac{x+9}{4y}$
   c. $\frac{6}{14m} \times \frac{3-m}{4}$
   d. $\frac{2p-5}{8} : \frac{p+2p}{16p}$
   e. $\left(\frac{3a+b}{b-5}\right)^2$
5. Sederhanakan pecahan bentuk aljabar berikut.
   a. $\frac{30m^2n}{5mn^2}$
   b. $\frac{15p^2}{3p+pq^2}$
   c. $\frac{9x+3y}{3}$
   d. $\frac{x+4}{x^2+x-12}$
   e. $\frac{x^2+7x+10}{x^2+4x-5}$

Sumber: Dokumentasi Penulis

Bab

2

Fungsi

- A. Relasi
- B. Fungsi atau Pemetaan
- C. Menghitung Nilai Fungsi

Tahukah kamu apa yang dimaksud dengan fungsi? Konsep fungsi merupakan salah satu konsep yang penting dalam matematika. Banyak permasalahan sehari-hari yang tanpa disadari menggunakan konsep ini.

Misalnya, dalam suatu kegiatan donor darah, setiap orang yang akan jadi pendonor diminta untuk menyebutkan jenis golongan darahnya. Dari data diketahui Andi bergolongan darah A. Budi golongan darahnya B, Ahmad golongan darahnya A, Anton golongan darahnya O, Abdul golongan darahnya AB, dan Bagus golongan darahnya B. Jika suatu saat dibutuhkan pendonor golongan darah A, siapakah yang dapat jadi pendonor?

Kasus tersebut merupakan contoh permasalahan yang menerapkan konsep fungsi. Jika kamu amati, setiap orang yang telah disebutkan mempunyai satu jenis golongan darah saja. Jadi, apa sebenarnya fungsi itu? Agar kamu lebih memahami tentang fungsi, pelajarilah bab ini dengan sungguh-sungguh.

Uji Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari materi pada bab ini, kerjakan soal-soal berikut.

1. Sebutkan bilangan bulat antara –5 dan 6.
2. Sebutkan faktor dari 36.
3. Jika himpunan A adalah nama pelajaran, sebutkan lima anggota himpunan itu?
4. Diketahui himpunan B adalah himpunan bilangan prima yang kurang dari 25. Nyatakan anggota himpunan tersebut dengan:
   a. mendaftar anggota-anggotanya,
   b. notasi pembentuk himpunan.
5. Hitunglah:
   a. $2x + 5$, jika $x = 3$.
   b. $\frac{1}{4}x - 7$, jika $x = 8$.

A. Relasi

1. Pengertian Relasi

Dalam kehidupan sehari-hari, kamu pasti pernah mendengar istilah relasi. Secara umum, relasi berarti hubungan. Di dalam matematika, relasi memiliki pengertian yang lebih khusus. Agar kamu lebih memahami pengertian relasi, pelajari uraian berikut.

Sumber: *Dokumentasi Penulis*

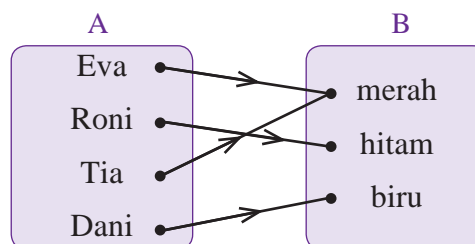
Gambar 2.1

Relasi bisnis berarti hubungan bisnis

Misalkan Eva, Roni, Tia, dan Dani diminta untuk menyebutkan warna kesukaannya masing-masing. Hasilnya adalah sebagai berikut:

- Eva menyukai warna merah
- Roni menyukai warna hitam
- Tia menyukai warna merah
- Dani menyukai warna biru

Pada uraian tersebut, terdapat dua himpunan, yaitu himpunan anak dan himpunan warna. Misalkan A adalah himpunan anak sehingga A = {Eva, Roni, Tia, Dani} dan B adalah himpunan warna sehingga B = {merah, hitam, biru}. Dengan demikian, relasi atau hubungan himpunan A dan himpunan B dapat digambarkan dengan diagram seperti tampak pada Gambar 2.2 .

Gambar 2.2 memperlihatkan Diagram panah dari himpunan A ke himpunan B dengan relasi "menyukai warna"

Gambar 2.2 : Relasi menyukai warna dengan diagram panah

Relasi himpunan A dan B pada Gambar 2.2 adalah "menyukai warna" Eva dipasangkan dengan merah, artinya Eva menyukai warna merah. Roni dipasangkan dengan hitam, artinya Roni menyukai warna hitam. Tia dipasangkan dengan merah, artinya Tia menyukai warna merah. Dani dipasangkan dengan biru, artinya Dani menyukai warna biru.

Dari uraian tersebut, kamu akan menemukan pernyataan berikut.

> Relasi antara dua himpunan, misalnya himpunan A dan himpunan B, adalah suatu aturan yang memasangkan anggota-anggota himpunan A dengan anggota-anggota himpunan B.

2. Menyatakan Relasi

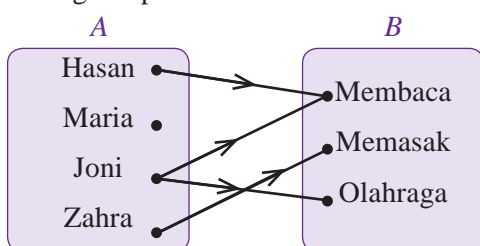
Relasi antara dua himpunan dapat dinyatakan dengan tiga cara, yaitu menggunakan **diagram panah, himpunan pasangan berurutan,** dan **diagram Cartesius.**

a. Diagram Panah

Perhatikan kembali Gambar 2.2 . Relasi antara himpunan A dan himpunan B dinyatakan oleh arah panah. Oleh karena itu, diagram tersebut dinamakan diagram panah.

Agar kamu lebih memahami materi ini, pelajarilah contoh-contoh berikut.

Contoh Soal 2.1

Perhatikan diagram panah berikut.

Tentukan hobi masing-masing anak.

Jawab :

- Hasan dipasangkan dengan membaca, berarti Hasan hobi membaca.
- Maria tidak dipasangkan dengan membaca, memasak, atau olahraga. Jadi, hobi Maria bukanlah membaca, memasak, atau olahraga.
- Joni dipasangkan dengan membaca dan olahraga, berarti Joni hobi membaca dan berolahraga.
- Zahra dipasangkan dengan memasak, berarti Zahra hobi memasak

Plus +

Tanda " ∈ " dibaca "elemen" yang artinya anggota

Contoh Soal 2.2

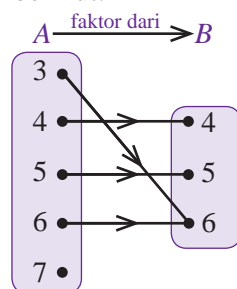
Diketahui himpunan-himpunan bilangan A = {3, 4, 5, 6, 7} dan B = {4, 5, 6}. Buatlah diagram panah dari himpunan A ke himpunan B yang menunjukkan relasi:

a. satu kurangnya dari,

b. faktor dari.

Jawab :

a. $3 \in A$ dipasangkan dengan $4 \in B$ karena $4 = 3 + 1$
$4 \in A$ dipasangkan dengan $5 \in B$ karena $5 = 4 + 1$
$5 \in A$ dipasangkan dengan $6 \in B$ karena $6 = 5 + 1$
Jadi, diagram panah dari himpunan A ke himpunan B yang menunjukkan relasi "satu kurangnya dari" adalah sebagai berikut.

b. $3 \in A$ dipasangkan dengan $6 \in B$ karena 3 merupakan faktor dari 6.
$4 \in A$ dipasangkan dengan $4 \in B$ karena 4 merupakan faktor dari 4.
$5 \in A$ dipasangkan dengan $5 \in B$ karena 5 merupakan faktor dari 5.
$6 \in A$ dipasangkan dengan $6 \in B$ karena 6 merupakan faktor dari 6.
Jadi, diagram panah himpunan A ke himpunan B yang menunjukkan relasi faktor dari adalah sebagai berikut.

b. Himpunan Pasangan Berurutan

Relasi "menyukai warna" pada Gambar 2.2 dapat juga dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan. Anggota-anggota himpunan A = {Eva, Roni, Tia, Dani} dipasangkan dengan anggota-anggota himpunan B = {merah, hitam, biru}, sebagai berikut.

Pernyataan "Eva menyukai warna merah" ditulis (Eva, merah).
Pernyataan "Roni menyukai warna hitam" ditulis (Roni, hitam).
Pernyataan "Tia menyukai warna merah" ditulis (Tia, merah).
Pernyataan "Dani menyukai warna biru" ditulis (Dani, biru).

Himpunan pasangan berurutan untuk relasi ini ditulis: {(Eva, merah), (Roni, hitam), (Tia, merah), (Dani, biru)}.

Jadi, relasi antara dua himpunan, misalnya himpunan A dan himpunan B dapat dinyatakan sebagai pasangan berurutan (x, y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$

Cerdas Berpikir

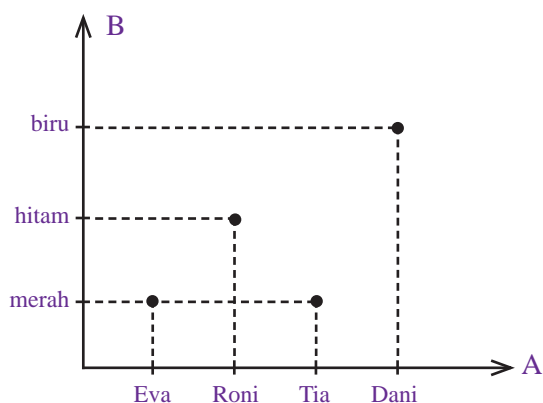
Diketahui dua himpunan
A = {0, 1, 2, 3}
B = {0, 2, 4, 6, 8}.
Tuliskan relasi yang mungkin dari himpunan A ke himpunan B sebanyak mungkin dan nyatakan dengan 3 cara yang telah kamu pelajari

Contoh Soal 2.3

Diketahui dua himpunan bilangan P = {0, 2, 4, 6, 8} dan Q = {0, 1, 2, 3, 4, 5}. Jika relasi himpunan P ke himpunan Q adalah "dua kali dari", tentukan himpunan pasangan berurutan untuk relasi tersebut.

Jawab :
$0 \in A$ dipasangkan dengan $0 \in B$ karena $0 = 0 \times 2$, ditulis (0, 0)
$2 \in A$ dipasangkan dengan $1 \in B$ karena $2 = 1 \times 2$, ditulis (2, 1)
$4 \in A$ dipasangkan dengan $2 \in B$ karena $4 = 2 \times 2$, ditulis (4, 2)
$6 \in A$ dipasangkan dengan $3 \in B$ karena $6 = 3 \times 2$, ditulis (6, 3)
$8 \in A$ dipasangkan dengan $4 \in B$ karena $8 = 4 \times 2$, ditulis (8, 4)
Jadi, himpunan pasangan berurutan untuk relasi "dua kali dari" adalah {(0, 0), (2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4)}

c. Diagram Cartesius

Perhatikan kembali Gambar 2.2 . Relasi pada gambar tersebut dapat dinyatakan dalam diagram Cartesius. Anggota-anggota himpunan A sebagai himpunan pertama ditempatkan pada sumbu mendatar dan anggota-anggota himpunan B pada sumbu tegak. Setiap anggota himpunan A yang berpasangan dengan anggota himpunan B, diberi tanda noktah (•). Untuk lebih jelasnya, perhatikan diagram Cartesius yang menunjukkan relasi "menyukai warna" berikut.

Gambar 2.3 : Relasi " menyukai warna " dengan diagram Cartesius

Gambar 2.3 : Memperlihatkan Diagram Cartesius dari himpunan *A* ke himpunan *B* dengan relasi "menyukai warna"

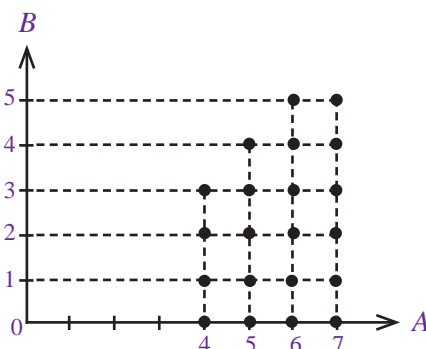
Contoh Soal 2.4

Diketahui dua himpunan bilangan $A = \{4, 5, 6, 7\}$ dan $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Jika relasi himpunan *A* ke himpunan *B* adalah "lebih dari", gambarkan diagram Cartesiusnya.

Jawab :

Diketahui: $A = \{4, 5, 6, 7\}$

$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

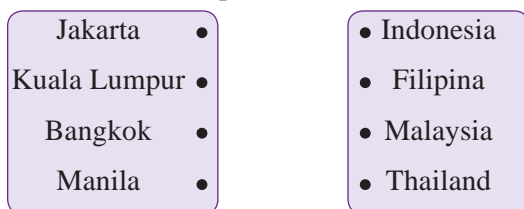
Relasi himpunan *A* ke himpunan *B* adalah "lebih dari". Jadi, diagramnya adalah sebagai *berikut.*

Tugas 2.1

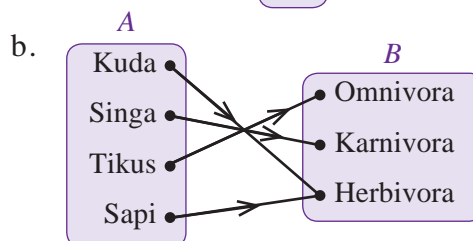
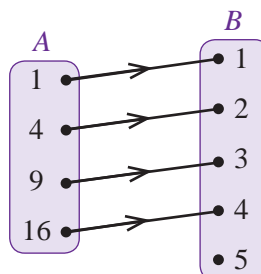
Carilah data mengenai makanan kesukaan dari 10 orang temanmu. Kemudian , buatlah relasi dari data tersebut dalam bentuk diagram panah, pasangan berurutan, dan diagram Cartesius

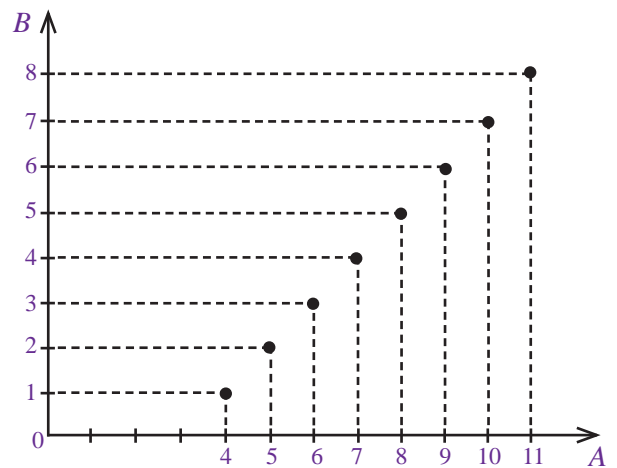
Uji Kompetensi 2.1

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Diketahui himpunan bilangan $P = \{3, 6, 9, 12\}$ dan $Q = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Jika relasi himpunan *P* ke himpunan *Q* adalah "tiga kali dari", buatlah diagram panahnya.
2. Perhatikan dua himpunan berikut.

Indonesia
Filipina
Malaysia
Thailand

   a. Buatlah nama relasi yang mungkin dari diagram tersebut.
   b. Gambarlah diagram panah dari setiap anggota himpunan *A* ke setiap anggota *B* sesuai dengan relasi yang telah kamu buat.
3. Dari penelitian yang dilakukan terhadap lima orang, diperoleh data sebagai berikut. Rika menyukai bakso, Eli menyukai pizza, Hanif menyukai soto, Erika menyukai bakso dan pizza, dan Steven tidak menyukai bakso, pizza, dan soto. Buatlah diagram panah dari data tersebut.
4. Tuliskan nama relasi yang mungkin dari diagram panah berikut.
   a.

   b.

5. Diketahui $P = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $Q = \{1, 3, 4, 6, 9, 11, 12\}$. Jika relasi himpunan *P* ke himpunan *Q* adalah "sepertiga dari", buatlah himpunan pasangan berurutannya.

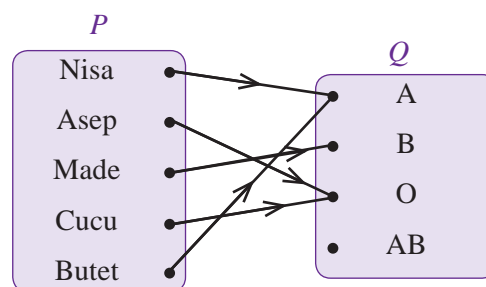
6. Relasi antara dua himpunan A dan B dinyatakan sebagai himpunan pasangan berurutan {(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)}.
   a. Tulislah anggota-anggota himpunan A dan B dengan mendaftar anggota-anggotanya.
   b. Gambarlah diagram panah dari kedua himpunan tersebut.
   c. Tuliskan nama relasi yang terbentuk dari himpunan A ke himpunan B.
7. Diketahui dua himpunan bilangan M = {6, 7, 8, 9, 10} dan N = {8, 9, 10, 11, 12, 13}.
   a. Gambarlah diagram panah yang memenuhi relasi "dua kurangnya dari" dari himpunan M ke himpunan N.
   b Nyatakan relasi tersebut sebagai himpunan pasangan berurutan.
   c. Nyatakan relasi tersebut dengan diagram Cartesius.
8. Perhatikan diagram Cartesius berikut.

   a. Tulislah anggota-anggota himpunan A dan B dengan mendaftar anggota-anggotanya.
   b. Tuliskan relasi himpunan A ke himpunan B, kemudian gambarlah diagram pada dari kedua himpunan tersebut.
   c. Nyatakan relasi tersebut sebagai himpunan pasangan berurutan

B. Fungsi atau Pemetaan

1. Pengertian Fungsi atau Pemetaan

Perhatikan diagram panah berikut.

Gambar 2.4 : memperlihatkan Diagram panah dari himpunan *P* ke himpunan *Q* dengan relasi "golongan darahnya"

P: Nisa, Asep, Made, Cucu, Butet
Q: A, B, O, AB

Gambar 2.4 : relasi " golongan darah "

Pada Gambar 2.4 , terdapat dua himpunan, yaitu himpunan P = {Nisa, Asep, Made, Cucu, Butet} dan himpunan Q = {*A*, *B*, *O*, *AB*}. Setiap anak anggota P dipasangkan dengan tepat satu golongan darah anggota Q. Bentuk relasi seperti ini disebut Fungsi atau Pemetaan.

Uraian tersebut memperjelas definisi fungsi atau pemetaan, sebagai berikut.

Fungsi atau pemetaan adalah relasi khusus yang memasangkan setiap anggota satu himpunan dengan tepat satu anggota satu himpunan yang lain.

Problematika

Manakah pernyataan yang benar?
a. Setiap relasi pasti merupakan pemetaan.
b. setiap pemetaan pasti merupakan relasi.
Jelaskan jawabanmu

Contoh Soal 2.5

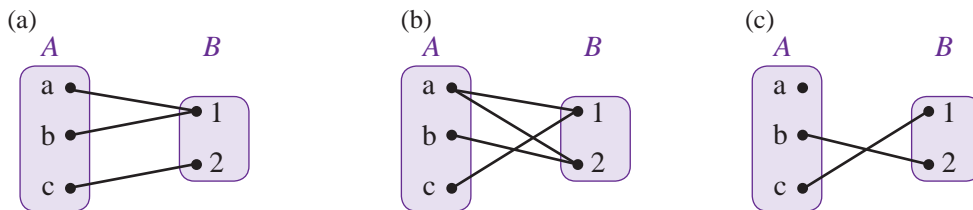
Dari diagram-diagram panah berikut, manakah yang merupakan fungsi?

(a)

A B

a b c 1 2

(b)

(c)

Jawab :

- Diagram panah (a) merupakan fungsi karena setiap anggota *A* dipasangkan dengan tepat satu anggota *B*.
- Diagram panah (b) bukan merupakan fungsi karena ada anggota *A*, yaitu *a*, mempunyai dua pasangan anggota *B*, yaitu 1 dan 2.
- Diagram panah (c) bukan merupakan fungsi karena ada anggota *A*, yaitu *a*, tidak mempunyai pasangan anggota *B*

Cerdas Berpikir

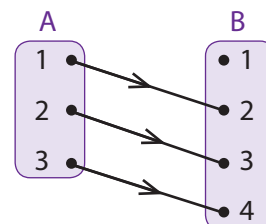
Diketahui dua himpunan A = {a, b, c} dan himpunan B = {1, 2, 3}. Buatlah beberapa kemungkinan fungsi atau pemetaan pada kedua himpunan tersebut, gambarkan dengan diagram panah

2. Domain, Kodomain, dan Range Fungsi

Perhatikan fungsi yang dinyatakan sebagai diagram panah pada gambar di samping. Pada fungsi tersebut, himpunan *A* disebut **domain** (daerah asal) dan himpunan *B* disebut **kodomain** (daerah kawan). Dari gambar tersebut, kamu juga memperoleh:

- $2 \in B$ merupakan peta dari $1 \in A$
- $3 \in B$ merupakan peta dari $2 \in A$
- $4 \in B$ merupakan peta dari $3 \in A$

Himpunan peta tersebut dinamakan range (daerah hasil). Jadi, dari diagram panah pada Gambar 2.5 diperoleh:

- Domainnya (D_f) adalah $A = \{1, 2, 3\}$.
- Kodomainnya adalah $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Rangenya (R_f) adalah $\{2, 3, 4\}$.

Contoh Soal 2.6

Perhatikan diagram panah berikut.

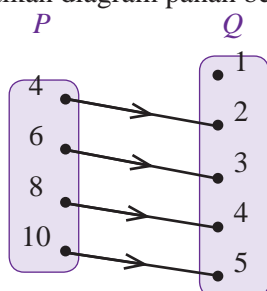
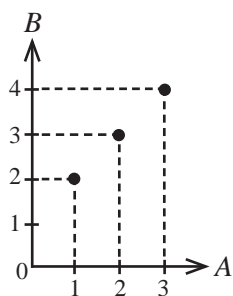



Diagram panah tersebut menunjukkan fungsi himpunan *P* ke himpunan *Q* dengan relasi "dua kali dari". Tentukanlah domain, kodomain, dan range fungsinya.

Jawab :

- Domainnya (D_f) adalah $P = \{4, 6, 8, 10\}$
- Kodomainnya adalah $Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Rangenya (R_f) adalah $\{2, 3, 4, 5\}$

Problematika

Misalkan himpunan $A = \{0, 1, 2\}$ dan $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Tentukan banyaknya pemetaan yang mungkin dari himpunan *A* ke *B* dan dari himpunan *B* ke *A*

3. Grafik Fungsi

Gambar 2.5 : Grafik Cartesius fungsi $f: x \rightarrow x + 1$

Perhatikan kembali Gambar 2.5 . Aturan yang memetakan himpunan *A* ke himpunan *B* pada gambar tersebut adalah untuk setiap *x* anggota *A* dipetakan ke $(x + 1)$ anggota *B*. Suatu fungsi dinotasikan dengan huruf kecil, seperti *f*, *g*, atau *h*. Jika fungsi pada Gambar 2.5 dinamakan *f* maka fungsi tersebut dinotasikan dengan $f: x \rightarrow x + 1$ (dibaca: fungsi *f* memetakan *x* ke $x + 1$). Dengan demikian, pada pemetaan $f: x \rightarrow x + 1$ dari himpunan *A* ke himpunan *B* diperoleh.

Untuk x = 1, $f: 1 \rightarrow 1 + 1$ atau $f: 1 \rightarrow 2$ sehingga $(1, 2) \in f$,

Untuk x = 2, $f: 2 \rightarrow 2 + 1$ atau $f: 2 \rightarrow 3$ sehingga $(2, 3) \in f$,

Untuk x = 3, $f: 3 \rightarrow 3 + 1$ atau $f: 3 \rightarrow 4$ sehingga $(3, 4) \in f$.

Untuk memudahkan cara menulis atau membaca, suatu pemetaan dapat dituliskan dalam bentuk tabel atau daftar. Untuk fungsi $f: x \rightarrow x + 1$, tabelnya adalah sebagai berikut.

Tabel 2.1 Tabel fungsi $f: x \rightarrow x + 1$

x	1	2	3
$x + 1$	2	3	4
Pasangan Berurutan	(1, 2)	(2, 3)	(3, 4)

Gambar 2.6
Grafik Cartesius fungsi $f: x \rightarrow x + 1$ dengan domain dan kodomainnya bilangan riil.

Dengan menggunakan pasangan-pasangan berurutan yang diperoleh pada Tabel 2.6 dapat digambar grafik Cartesius untuk fungsi $f: x \longrightarrow x + 1$ seperti tampak pada Gambar 2.6 .

Gambar 2.6 merupakan grafik Carteius fungsi $f: x \longrightarrow x + 1$ dengan domain $D_f = A = \{1, 2, 3,\}$, kodomain $B = \{1, 2, 3, 4\}$ dan Range $R_f = \{2, 3, 4\}$ yang digambarkan dengan noktah-noktah. Jika domain dan kodomainnya diperluas pada himpunan bilangan riil, rangenya ditunjukkan dengan garis yang melalui noktah-noktah seperti pada Gambar 2.6.

Plus +

- **Bilangan rasional** adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan $\frac{a}{b}$.
- **Bilangan irasional** adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan $\frac{a}{b}$.
- Gabungan himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irasional disebut himpunan **bilangan riil.**

Contoh Soal 2.7

Gambarlah grafik fungsi $f: x \rightarrow 2x$ pada bidang Cartesius dengan domain dan kodomainnya himpunan bilangan riil.

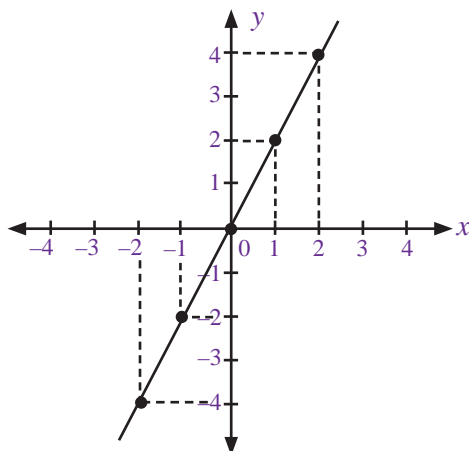
Jawab :

Terdapat beberapa langkah untuk menggambarkan suatu grafik fungsi, sebagai berikut.

(1) Tentukan domainnya. Untuk memudahkan, ambil beberapa bilangan bulat di sekitar nol.

(2) Buat tabel pasangan berurutan fungsi tersebut.

x	–2	–1	0	1	2
$2x$	–4	–2	0	2	–4
Pasangan Berurutan	(–2, –4)	(–1, –2)	(0, 0)	(1, 2)	(2, 4)

(3) Gambarkan noktah-noktah pasangan berurutan tersebut pada bidang Cartesius. Kemudian, hubungkan noktah-noktah itu dengan garis lurus sehingga diperoleh grafik seperti pada gambar berikut.

Jika setiap anggota himpunan *A* berpasangan dengan tepat satu anggota *B* dan setiap anggota *B* pun berpasangan dengan tepat satu anggota *A* maka fungsi yang seperti ini dinamakan korespondensi **satu-satu**.

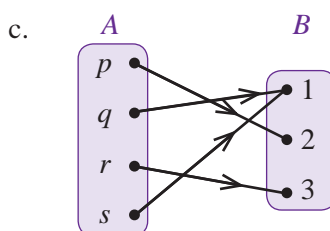
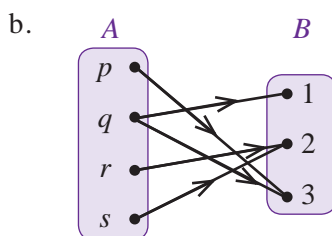
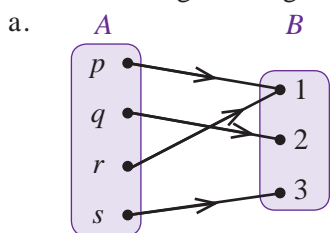
Uji Kompetensi 2.2

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Perhatikan diagram-diagram panah berikut.

a.

b.

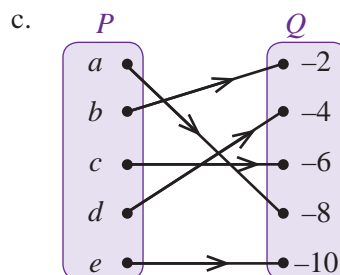
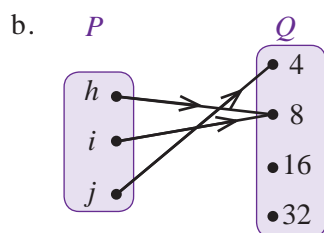
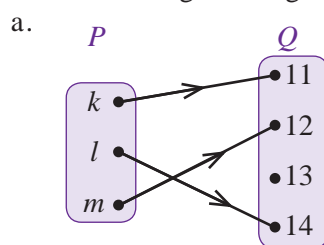
c.

Di antara relasi-relasi tersebut, diagram manakah yang merupakan fungsi? Jelaskan jawabanmu.

2. Diketahui himpunan *A* = {1, 2, 3, 4} dan *B* = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Jika relasi himpunan A ke himpunan B adalah "faktor dari", apakah relasi tersebut merupakan fungsi? Jelaskan jawabanmu.

3. Perhatikan diagram-diagram panah berikut.

a.

b.

c.

Tentukanlah domain, kodomain, dan range dari setiap diagram panah tersebut.

4. Relasi antara dua himpunan *A* dan *B* dinyatakan dengan pasangan himpunan berurutan {(0, –3), (1, –2), (2, –1), (3, 0), (4, 1)}.

a. Tuliskan anggota-anggota himpunan A dan himpunan B dengan cara mendaftar anggota anggotanya.
b. Gambarlah diagram panah kedua himpunan tersebut.
c. Tuliskan nama relasi yang terbentuk dari himpunan A ke himpunan B.
d. Apakah relasi tersebut merupakan suatu fungsi? Jika ya, tentukan domain, kodomain, dan rangenya.

5. Diketahui fungsi $f: x \rightarrow x + 4$ dari himpunan $P = \{-3, -2, -1, 0\}$ ke himpunan bilangan cacah.
   a. Tentukan domain, kodomain, dan range dari fungsi tersebut.
   b. Buatlah himpunan pasangan terurutnya.
   c. Gambarlah grafik fungsi tersebut.
6. Diketahui fungsi $f : x \rightarrow x^2$ dari himpunan bilangan $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ke himpunan bilangan cacah. Gambarlah grafik fungsi tersebut.
7. Suatu fungsi ditentukan oleh aturan $g: x \rightarrow x^2 + 1$. Gambarkan grafik fungsi g jika domain dan kodomainnya merupakan himpunan bilangan riil.
8. Seorang pedagang membuat daftar harga barang dengan menggunakan kata sandi. Kata sandi yang digunakan adalah RUMAH KECIL! Huruf-huruf pada kata sandi tersebut dipasangkan satu-satu dengan angka 0 sampai dengan 9 dan tanda koma.

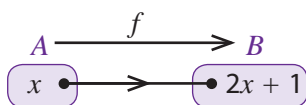
R	U	M	A	H	K	E	C	I	L	!
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	,

   Dengan menggunakan sandi tersebut, suatu barang yang harganya Rp5.000,00 ditulis KRRR!RR.
   a. Tuliskan harga barang-barang berikut dengan menggunakan kata sandi.
      1) Rp1.250,00 3) Rp1.000,00
      2) Rp6.300,00 4) Rp3.550,00
   b. Tuliskan harga barang yang dinyatakan dengan kata sandi berikut.
      1) MCRR!RR 3) EHRR!RR
      2) ILKR!RR 4) LKR!RR

C. Menghitung Nilai Fungsi

1. Notasi Fungsi

Pada bagian sebelumnya, kamu telah mengetahui bahwa fungsi dinotasikan dengan huruf kecil, seperti f, g, atau h. Pada fungsi f dari himpunan A ke himpunan B, jika $x \in B$ maka peta atau bayangan x oleh f dinotasikan dengan $f(x)$.

Perhatikan Gambar 2.7 . Gambar tersebut menunjukkan fungsi himpunan A ke himpunan B menurut aturan $f : x \rightarrow 2x + 1$. Pada gambar, dapat dilihat bahwa x merupakan anggota domain f. Fungsi $f : x \rightarrow 2x + 1$ berarti fungsi f memetakan x ke $2x + 1$. Oleh karena itu, bayangan x oleh fungsi f adalah $2x + 1$. Jadi, dapat dikatakan bahwa $f(x) = 2x + 1$ adalah rumus untuk fungsi f.

Gambar 2.7: memperlihatkan fungsi himpunan A ke himpunan B dengan aturan $f: x \rightarrow 2x + 1$

> Jika fungsi $f : x \rightarrow ax + b$ dengan x anggota domain f, rumus fungsi f adalah $f(x) = ax + b$.

2. Menghitung Nilai Fungsi

Pada bagian ini, kamu akan mempelajari cara menghitung nilai fungsi. Pelajarilah contoh-contoh soal berikut.

Contoh Soal 2.8

Diketahui fungsi $f: x \rightarrow 2x - 2$ pada himpunan bilangan bulat. Tentukan:
a. $f(1)$,
b. $f(2)$,
c. bayangan (-2) oleh f,
d. nilai f untuk $x = -5$,
e. nilai x untuk $f(x) = 8$,
f. nilai a jika $f(a) = 14$.

Jawab :
Diketahui f: $x \rightarrow 2x - 2$ pada himpunan bilangan bulat.
Dengan demikian rumus fungsinya $f(x) = 2x - 2$.

a. $f(1) = 2(1) - 2 = 0$
b. $f(2) = 2(2) - 2 = 2$
c. Bayangan (–2) oleh f sama dengan $f(-2)$.
   Jadi, $f(-2) = 2(-2) - 2 = -6$
d. Nilai f untuk $x = -5$ adalah $f(-5) = 2(-5) - 2 = -12$
e. Nilai x untuk $f(x) = 8$ adalah
   $2x - 2 = 8$
   $2x = 8 + 2$
   $2x = 10$
   $x = 5$
f. Nilai a jika $f(a) = 14$ adalah
   $2a - 2 = 14$
   $2a = 14 + 2$
   $2a = 16$
   $a = 8$

Perhatikan gambar berikut.

(i)

(ii)

(iii)

(iv)

Diagram panah di atas yang merupakan pemetaan dari *A* ke *B* adalah ....

a. (i) **c.** (iii)
b. (ii) **d.** (iv)

Jawab:
Diagram panah yang merupakan pemetaan dari *A* ke *B* adalah gambar (iv) karena setiap anggota himpunan *A* berpasangan dengan satu himpunan *B*. Gambar (i), (ii) dan (iii) bukan merupakan pemetaan karena pada gambar (i) dan (ii), terdapat anggota himpunan *B* yang tidak berpasangan, dan pada gambar (iii) terdapat anggota himpunan *A* yang berpasangan dengan lebih dari satu anggota himpunan B.

Jawaban: d

UN SMP, 2006

Contoh Soal 2.9

Diketahui g: $x \rightarrow x^2 + 2$ dengan domain $\{x \mid -4 < x \leq 2, x \in$ bilangan bulat$\}$ dan kodomain bilangan bulat.

a. Tuliskan rumus untuk fungsi g.
b. Tuliskan domain g dengan mendaftar anggota-anggotanya.
c. Tentukan daerah hasil g.
d. Gambarlah grafik fungsi g jika domainnya $\{x \mid -4 < x \leq 1, x \in$ bilangan riil$\}$ dan kodomainnya diperluas pada himpunan bilangan riil.

Jawab :

a. Rumus untuk fungsi g adalah $g(x) = x^2 + 2$
b. Domain g adalah $D_g = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
c. Daerah hasil g:
   $g(x) = x^2 + 2$
   $g(-3) = (-3)^2 + 2 = 11$
   $g(-2) = (-2)^2 + 2 = 6$
   $g(-1) = (-1)^2 + 2 = 3$
   $g(0) = (0)^2 + 2 = 2$
   $g(1) = (1)^2 + 2 = 3$
   $g(2) = (2)^2 + 2 = 6$
   Jadi, daerah hasil g adalah $R_g = \{2, 3, 6, 11\}$
d. Jika domainnya diketahui $\{x \mid -4 < x \leq 1, x \in$ bilangan riil$\}$ dan kodomainnya diperluas pada himpunan bilangan riil, grafiknya seperti pada gambar di samping.

3. Menentukan Rumus fungsi

Suatu fungsi dapat ditentukan rumusnya jika nilai data diketahui. Bagaimanakah caranya? Untuk menjawabnya, pelajarilah contoh soal berikut.

Solusi Matematika

Jika diketahuisuatu fungsi f dirumuskan oleh $f(x) = 4x + b$ diketahui pula $f(1) = 3$ dan $f(-3) = 11$. Maka nilai a dan b berturut-turut adalah ....

a. 4 dan –1
b. 4 dan 7
c. –2 dan 1
d. –2 dan 5

Jawab:
$f(1) = a(1) + b = a + b = 3$ ...(i)
$f(-3) = a(-3) + b = -3a + b = 1$ ...(ii)
Dari persamaan (i) dan (ii) didapat
$a + b = 3$
$-3 + b = 11$ –

$4a = -8$ fi $a = \frac{-8}{4} = -2$
$a + b = 3$
$b = 3 - a$
$= 3 -(-2) = 5$
Jadi, $a = -2$ dan $b = 5$

Jawaban: d

UAN SLTP, 2001

Contoh Soal 2.10

Fungsi h pada himpunan bilangan riil ditentukan oleh rumus $h(x) = a\,x + b$, dengan a dan b bilangan bulat. Jika $h(-2) = -4$ dan $h(1) = 5$, tentukan:

a. nilai a dan b,
b. rumus fungsi tersebut.

Jawab :
$h(x) = ax + b$

a. Oleh karena $h(-2) = -4$ maka $h(-2) = a(-2) + b = -4$
$-2a + b = -4$ ...(1)
$h(1) = 5$ maka $h(1) = a(1) + b = 5$
$a + b = 5$
$b = 5 - a$ ...(2)

Substitusikan persamaan (2) ke persamaan (1), diperoleh:
$-2a + b = -4$
$-2a + (5 - a) = -4$
$-2a + 5 - a = -4$
$-3a + 5 = -4$
$-3a = -9$
$a = 3$

Substitusikan nilai $a = 3$ ke persamaan (2), diperoleh
$b = 5 - a$
$= 5 - 3 = 2$

Jadi, nilai a sama dengan 3 dan nilai b sama dengan 2.

b. Oleh karena nilai $a = 3$ dan nilai $b = 2$, rumus fungsinya adalah $h(x) = 3x + 2$.

Uji Kompetensi 2.3

Kerjakanlah soal-soal berikut.

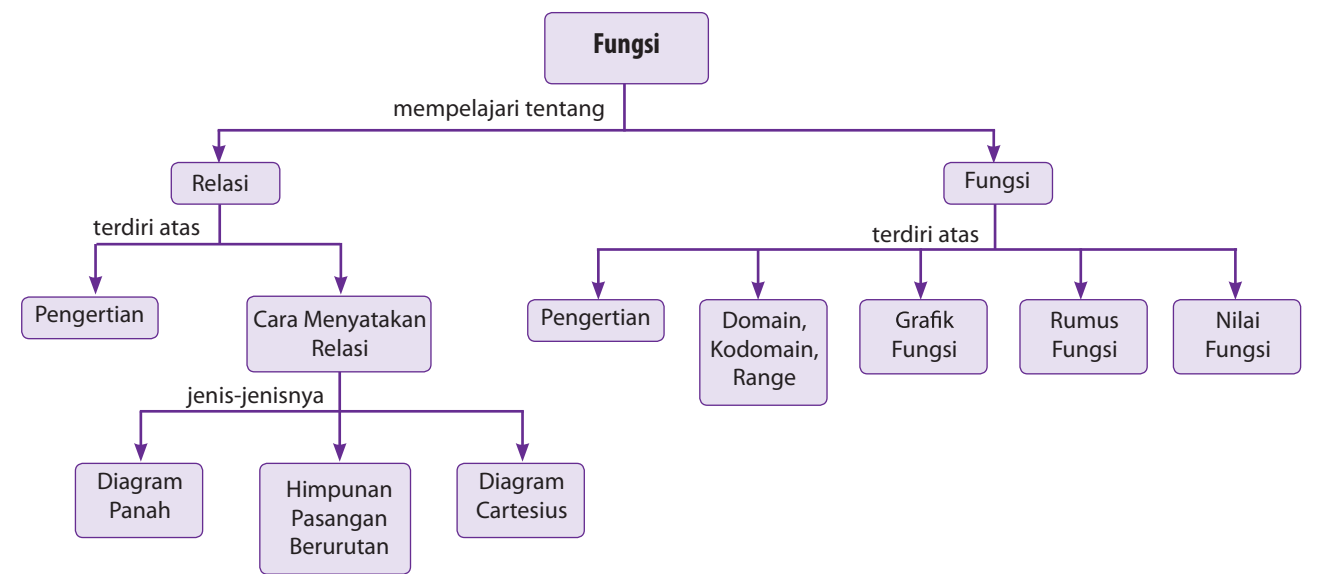
1. Diketahui fungsi f: $x \to 4x - 1$ pada himpunan bilangan bulat. Tentukan nilai dari:
   a. $f(3)$
   b. $f(-3)$
   c. $f(5)$
   d. $f(1)$
   e. $f(-2)$
   f. $f(8)$
2. Fungsi g ditentukan oleh $g(x) = -5x + 1$ pada himpunan bilangan bulat. Tentukan:
   a. bayangan 2 pada g,
   b. nilai $g(0)$,
   c. nilai g jika $x = -1$,
   d. nilai x jika $g(x) = -14$,
   e. nilai a jika $g(a) = 21$.
3. Suatu fungsi f dinyatakan oleh f: $x \to 4 - x$. Jika domainnya {–2, –1, 0, 1, 2}, tentukan range fungsi tersebut.
4. Fungsi h ditentukan oleh $h(x) = x^2 + 2$ dengan x peubah pada bilangan riil. Jika range fungsi h adalah {18, 27, 38, 51}, tentukan domain fungsi h.
5. Diketahui fungsi $f(x) = -2x^2 + 5$ pada himpunan bilangan bulat. Jika $f(a) = -3$, tentukan nilai a.
6. Suatu fungsi f dirumuskan oleh $f: x \to \frac{1}{2}(x + 3)$ pada bilangan bulat. Tentukan nilai b jika $f(b) = 4$.
7. Diketahui $g = x^2 - 4$ pada himpunan bilangan bulat.
   a. Gambarlah grafik fungsi tersebut.
   b. Dari grafik yang telah kamu buat, berapakah nilai x jika $g(x) = 12$?
8. Gambarlah grafik fungsi h: $x \to 5 - 7x$ pada bidang Cartesius dengan domain dan kodomainnya himpunan bilangan riil.
9. Fungsi f ditentukan oleh $f(x) = ax + b$. Jika $f(2) = 12$ dan $f(-3) = -23$, tentukan:
   a. nilai a dan b,
   b. rumus fungsi tersebut.
10. Diketahui fungsi $f(x) = px + 5$. Jika $f(7) = 2$, tentukan nilai p.

Rangkuman

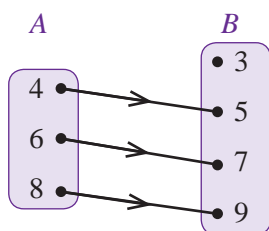
1. Relasi antara dua himpunan A dan B adalah suatu aturan yang memasangkan anggota himpunan A dengan anggota - anggota himpunan B.
2. Relasi dapat dinyatakan dengan tiga cara, yaitu diagram panah, himpunan pasangan terurut, dan diagram Cartesius.
3. Fungsi atau pemetaan adalah relasi khusus yang memasangkan **setiap anggota A** dengan tepat **satu anggota B**.
4. Setiap fungsi mempunyai domain (daerah asal), kodomain (daerah kawan), dan range (daerah hasil).
5. Suatu fungsi dinotasikan oleh $f : x \to ax + b$ dan dapat juga ditulis $f(x) = ax + b$.

Refleksi

- Pada bab Fungsi ini, menurutmu bagian mana yang paling menarik untuk dipelajari?
- Setelah mempelajari bab ini, apakah kamu merasa kesulitan memahami materi tertentu? Materi apakah itu?
- Kesan apakah yang kamu dapatkan setelah mempelajari materi bab ini?

Peta Konsep

Uji Kompetensi Bab 2

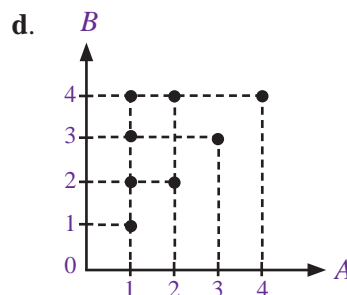
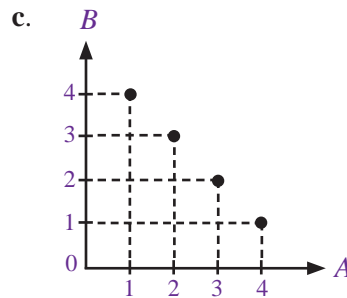
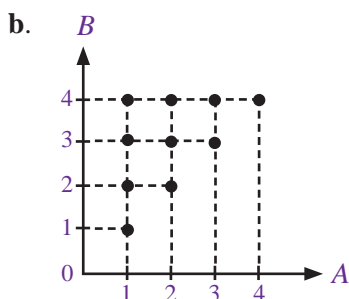
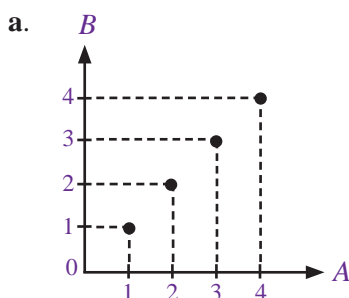
A. Pilihlah satu jawaban yang benar.

1. Secara umum, relasi diartikan sebagai ....
   a. hubungan beberapa himpunan
   b. hubungan antara anggota satu himpunan dengan anggota himpunan lain
   c. fungsi
   d. pemetaan
2. Berikut adalah cara menyatakan relasi dua himpunan, *kecuali* ....
   a. diagram panah
   b. diagram Venn
   c. himpunan pasangan terurut
   d. diagram Cartesius
3. Relasi dari himpunan *A* ke himpunan *B* pada diagram panah di bawah adalah ....

   a. faktor dari
   b. kurang dari
   c. lebih dari
   d. setengah dari
4. Diketahui dua himpunan bilangan $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ dan $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,\}$. Himpunan pasangan terurut yang menyatakan relasi "dua kali dari" adalah ....
   a. {(–4, –3), (–2, –2), (0, 0), (2,2), (4, 3)}
   b. {(–4, –2), (–2, 2), (0, 0), (2, 2), (4, 2)}
   c. {(–4, –2), (–2, –1), (0, 0), (2, 1), (4, 2)}
   d. {(–4, –2), (–2, –1), (2, 1), (4, 2)}
5. Jika $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, diagram Cartesius yang menggambarkan relasi "faktor dari" adalah ....

   a.

   b.

   c.

   d.

6. Diagram panah berikut yang merupakan fungsi dari *P* ke *Q* adalah ....

   a.

   c.

   b.

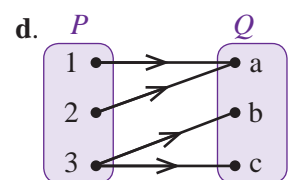
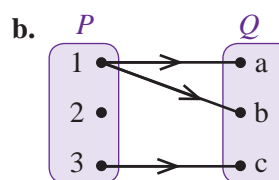
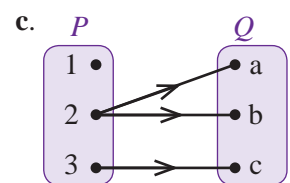
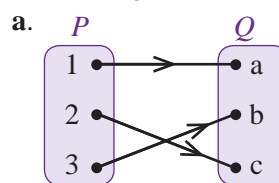
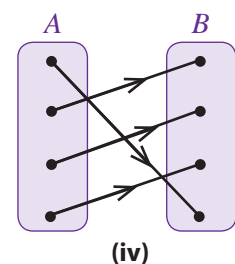
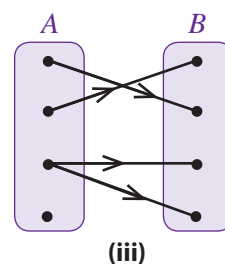
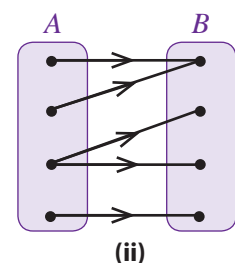
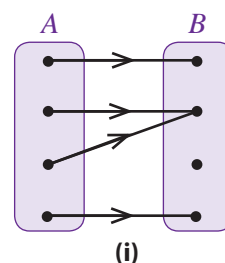
   d.

7. Perhatikan diagram-diagram panah berikut.

(i)

(ii)

(iii)

(iv)

Yang bukan merupakan fungsi adalah ....

a. (i) dan (ii) **c.** (ii) dan (iii)

b. (i) dan (iii) **d.** (iii) dan (iv)

8. Perhatikan himpunan pasangan terurut berikut ini.

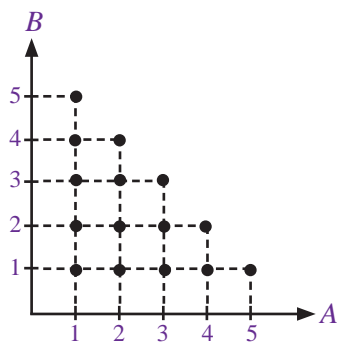
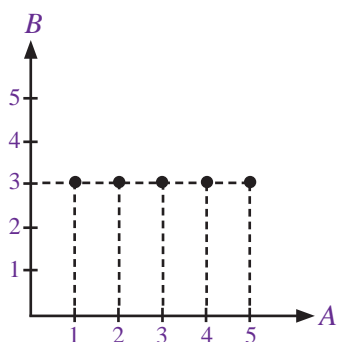
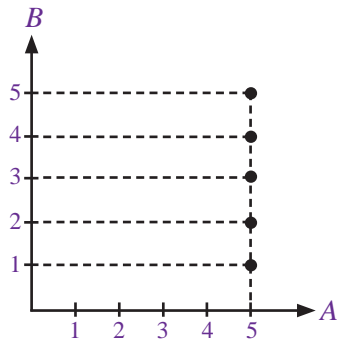
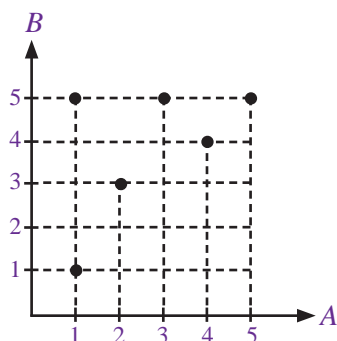
1. {(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)}
2. {(0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5)}
3. {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)}
4. {(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)}

Yang merupakan fungsi adalah ....

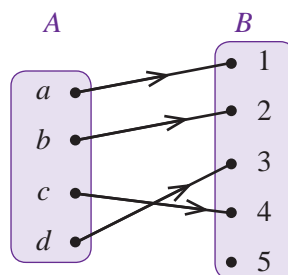
a. 1 dan 3 **c.** 1 dan 4

b. 2 dan 4 **d.** 2 dan 3

9. Di antara diagram-diagram Cartesius berikut, yang merupakan fungsi adalah ....

a.

b.

c.

d.

10. Pada sebuah fungsi, daerah yang semua anggotanya selalu berpasangan adalah ....

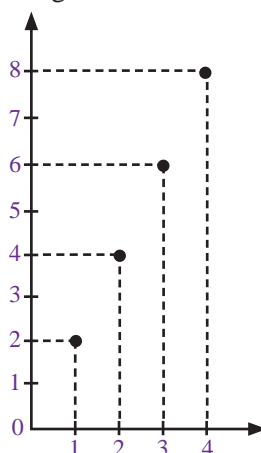
a. domain
b. kodomain
c. domain dan kodomain
d. domain dan range

11.

Domain fungsi yang ditunjukkan diagram panah di atas adalah ....

a. {*a*, *b*, *c*, *d*}
b. {1, 2, 3, 4, 5}
c. {1, 2, 3, 4}
d. {*a*, *b*, *c*, *d*, 1, 2, 3, 4}

12. Diketahui himpunan pasangan berurutan dari suatu pemetaan adalah {(0, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 6)}. Daerah hasil pemetaan tersebut adalah ....

a. {0, 1, 2, 3}
b. {3, 4, 5, 6}
c. {0, 1, 2, 3, 4, 5}
d. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

13. Kodomain dari pemetaan yang ditunjukkan diagram Cartesius berikut adalah ....

a. {1, 2, 3,4}
b. {0, 1, 2, 3, 4}
c. {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
d. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

14. Pada fungsi $f : x \rightarrow x - 7$, peta dari 2 adalah ....

a. – 9 **c.** 5

b. – 5 **d.** 9

15. Suatu fungsi *f* dinyatakan oleh $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$. Nilai $f(12)$ = ...

a. 2 **c.** 4

b. 3 **d.** 5

16. Ditentukan $f(x) = 5 - 2x$ dengan daerah asal {–2, –1, 0, 1, 2}. Daerah hasil fungsi tersebut adalah ....

a. $\{0, 1, 3, 5\}$
b. $\{1, 3, 7, 9\}$
c. $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
d. $\{3, 5, 7, 9, 11\}$

17. Fungsi f didefinisikan oleh $f(x) = 2x^2 - x + 1$ dengan domain $\{-1, 0, 1\}$. Daerah hasil fungsi tersebut adalah ....
a. $\{-1, 5, 9\}$
b. $\{-7, -1, 9\}$
c. $\{-7, -1, 1\}$
d. $\{-1, 1, 5\}$

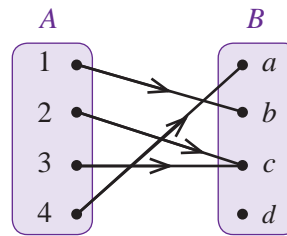
18. Jika $f(x) = 3x - 2$ dan $f(a) = 7$, nilai a yang memenuhi adalah ....
a. 3
b. 5
c. 9
d. 19

19. Diketahui $f : x \rightarrow -2x + 9$. Jika $p \rightarrow 15$, nilai p sama dengan ....
a. -3
b. -2
c. 2
d. 3

20. Suatu fungsi f dinyatakan oleh $f(x) = ax+b$. Diketahui $f(1) = 3$ dan $f(-3) = 11$. Nilai a dan b berturut-turut adalah ....
a. 4 dan -1
b. 4 dan 7
c. -2 dan 1
d. -2 dan 5

B. Kerjakanlah soal-soal berikut

1. Diketahui dua himpunan bilangan $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Jika relasi himpunan A ke himpunan B adalah "sama dengan", nyatakan relasi tersebut dalam:
a. diagram panah,
b. himpunan pasangan berurutan,
c. diagram Cartesius.

2. Perhatikan diagram panah berikut.

Tentukan:
a. domain,
b. kodomain,
c. range.

3. Diketahui $h: x \rightarrow 2x^2 - 4$ dengan domain $\{x \mid -2 \leq x \leq 2$, x anggota bilangan bulat$\}$ dan kodomain bilangan bulat.
a. Tuliskan rumus untuk fungsi h.
b. Tuliskan domain h dengan mendaftar anggota-anggotanya.
c. Tentukan daerah hasil h.
d. Gambarlah grafik fungsi h jika domain dan kodomainnya diperluas pada himpunan bilangan riil.

4. Pada fungsi f: $x \rightarrow -\frac{1}{4}x - 6$ dengan x anggota bilangan bulat, tentukan:
a. peta dari -8 dan 5,
b. nilai a jika $f(a) = -12$.

5. Diketahui $f(x) = ax+b$ dengan $f(3) = 1$ dan $f(1) = -1$. Tentukan:
a. nilai a dan b,
b. bentuk fungsi,
c. nilai $f(-2)$.

Sumber: *Science Encylopedia, 1997*

Bab 3

Persamaan Garis Lurus

Dalam suatu perlombaan balap sepeda, seorang pembalap mengayuh sepedanya dengan kecepatan tetap. Setiap 5 detik, pembalap tersebut menempuh jarak 12 meter. Berapa jarak yang ditempuh pembalap setelah 1 jam?

Dalam fisika, gerak yang dialami oleh sepeda tersebut dinamakan Gerak Lurus Beraturan (GLB). GLB adalah gerak benda yang melintasi garis lurus dan dalam selang waktu yang sama benda menempuh perpindahan yang sama pula.

Perhitungan untuk kasus tersebut dapat diterjemahkan ke dalam koordinat Cartesius. Dalam koordinat tersebut, lamanya waktu dan jarak tempuh akan membentuk suatu garis lurus. Setelah ditentukan persamaan garis lurusnya, dapat ditentukan penyelesaian untuk kasus di atas.

Sebenarnya, apa yang dimaksud dengan garis lurus? Bagaimana dengan sifat-sifat dan perhitungannya? Pelajarilah materi bab ini dengan saksama.

Uji Kompetensi Awal

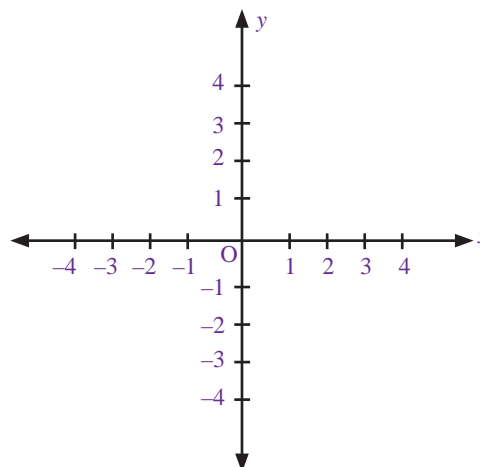
Sebelum mempelajari materi pada bab ini, kerjakan soal-soal berikut.

1. Misalkan fungsi f: $x \rightarrow 3x + 5$ mempunyai daerah asal $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
   a. Tentukan daerah hasil fungsi f.
   b. Nyatakan dalam himpunan pasangan terurut.
   c. Gambarlah grafik fungsi f.
   d. Bagaimana bentuk grafik fungsi f ?
2. Diketahui fungsi $f(x) = 2x - 3$. Tentukan nilai $f(x)$ untuk:
   a. $x = 2$ b. $x = 0$ c. $x = 3$
3. Gambarkan grafik fungsi dari soal nomor 2.

A. Pengertian Persamaan Garis Lurus

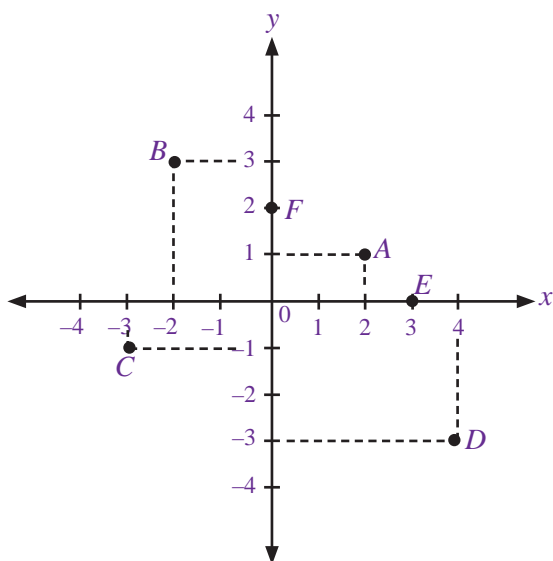
Sebelum memahami pengertian persamaan garis lurus, ada baiknya kamu mengingat kembali materi tentang koordinat Cartesius persamaan garis lurus selalu digambarkan dalam koordinat Cartesius. Untuk itu, pelajarilah uraian berikut.

1. Koordinat Cartesius

Pada bab sebelumnya, kamu telah mengenal tentang bidang Cartesius. Coba kamu perhatikan Gambar 3.1 dengan seksama. Gambar tersebut menunjukkan bidang koordinat Cartesius yang memiliki sumbu mendatar (disebut sumbu-x) dan sumbu tegak (disebut sumbu-y). Titik potong kedua sumbu tersebut dinamakan titik asal atau titik pusat koordinat. Pada Gambar 3.1, titik pusat koordinat Cartesius ditunjukkan oleh titik O (0, 0). Sekarang, bagaimana menggambar titik atau garis pada bidang koordinat Cartesius?

Gambar 3.1 : Bidang koordinat Cartesius

a. Menggambar Titik pada Koordinat Cartesius

Setiap titik pada bidang koordinat Cartesius dinyatakan dengan pasangan berurutan x dan y, di mana x merupakan koordinat sumbu-x (disebut *absis*) dan y merupakan koordinat sumbu-y (disebut *ordinat*). Jadi, titik pada bidang koordinat Cartesius dapat dituliskan (x, y).

Pada Gambar 3.2 , terlihat ada 6 buah titik koordinat pada bidang koordinat Cartesius. Dengan menggunakan aturan penulisan titik koordinat, keenam titik tersebut dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut.

$A\ (x, y) \rightarrow A\ (2, 1)$
$B\ (x, y) \rightarrow B\ (–2, 3)$
$C\ (x, y) \rightarrow C\ (–3, –1)$
$D\ (x, y) \rightarrow D\ (4, –3)$
$E\ (x, y) \rightarrow E\ (3, 0)$
$F\ (x, y) \rightarrow F\ (0, 2)$

Gambar 3.2 : Enam titik koordinat pada bidang Cartesius.

Contoh Soal 3.1

Diketahui titik-titik pada bidang koordinat Cartesius sebagai berikut.

a. (10, –5) c. (–7, –3) e. (–4, 9)
b. (2, 8) d. (6, 1)

Tentukan absis dan ordinat dari masing-masing titik tersebut.

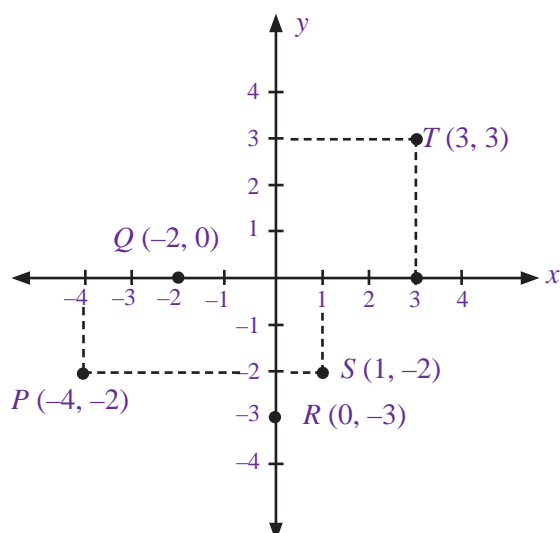
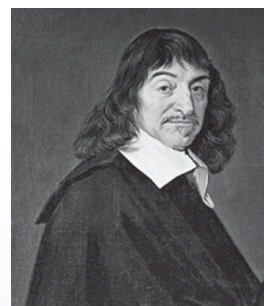
Jawab :

a. Dari titik (10, –5) diperoleh absis: 10, ordinat: –5
b. Dari titik (2, 8) diperoleh absis: 2, ordinat: 8
c. Dari titik (–7, –3) diperoleh absis:–7, ordinat: –3
d. Dari titik (6, 1) diperoleh absis: 6, ordinat: 1
e. Dari titik (–4, 9) diperoleh absis:–4, ordinat: 9

Contoh Soal 3.2

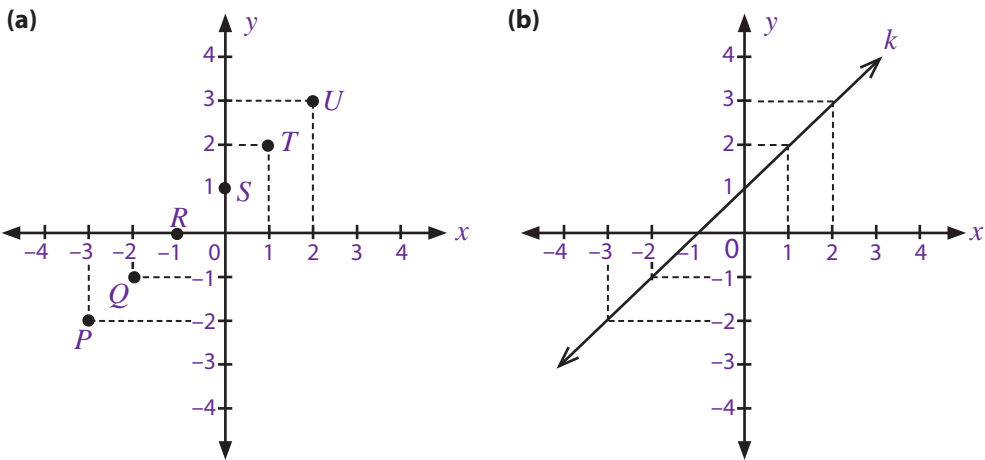
Gambarlah titik-titik berikut pada bidang koordinat Cartesius.

a. P (–4,–2) c. R (0, –3) e. T (3, 3)
b. Q (–2, 0) d. S (1, –2)

Jawab :

Rene Descartes (1596–1650)

Rene Descartes adalah seorang matematikawan berkembangsaan Prancis. Ia adalah orang yang pertama kali memperkenalkan metode penulisan titik yang diwakili oleh sepasang bilangan-bilangan yang merupakan jarak-jarak dari masing-masing sumbu. Metode penulisan titik seperti ini dinamakan koordinat cartesius.

Sumber: *Ensiklopedia Matematika dan Peradaban Manusia*, 2002

b. Menggambar Garis pada Koordinat Cartesius

Kamu telah memahami bagaimana menggambar titik pada bidang koordinat Cartesius. Sekarang bagaimana menggambar garis lurus pada bidang yang sama? Coba perhatikan Gambar 3.3

Gambar 3.3 : Garis pada Bidang Koordinat Cartesius.

Problematika

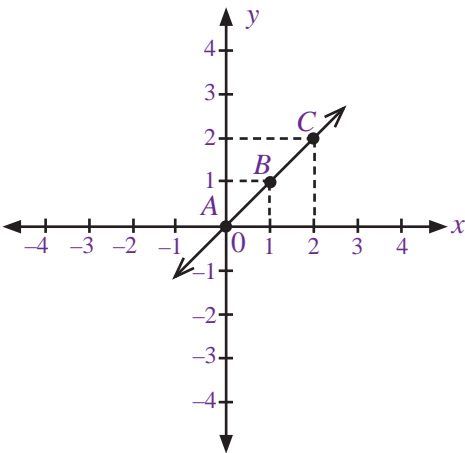
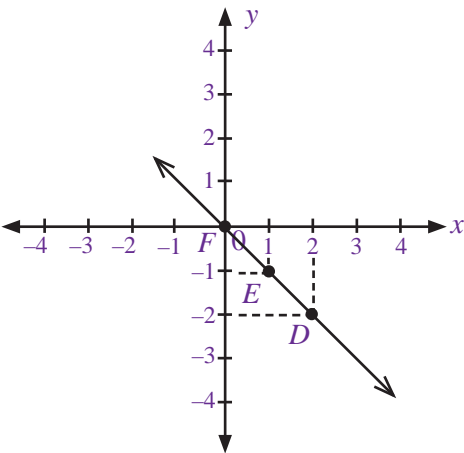
Diketahui lima titik koordinat, yaitu $P(-4, 3)$, $Q(a, 1)$, $R(1, -2)$, $S(b, 2)$, dan $T(4, c)$. Jika kelima titik itu membentuk garis lurus, tentukan nilai a, *b*, dan *c*.

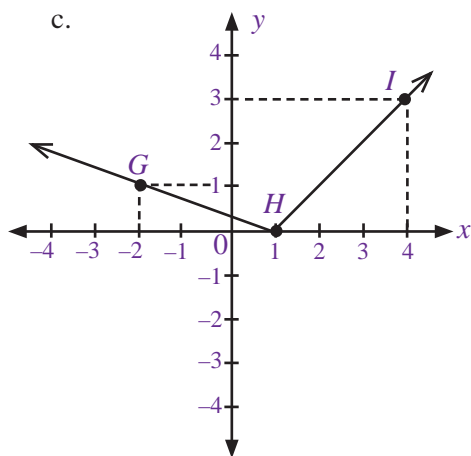
Perlu diingat, garis lurus adalah kumpulan titik-titik yang letaknya sejajar. Dari Gambar 3.3(a) , terlihat bahwa titik-titik *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, dan *U* memiliki letak yang sejajar dengan suatu garis lurus, misalkan garis *k*, seperti yang digambarkan pada Gambar 3.3(b). Sebuah garis lurus dapat terbentuk dengan syarat sedikitnya ada dua titik pada bidang koordinat Cartesius.

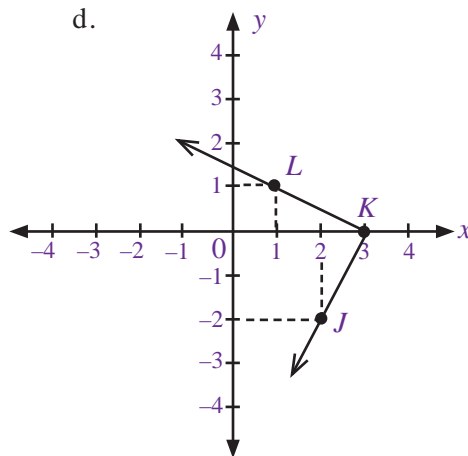
Contoh Soal 3.3

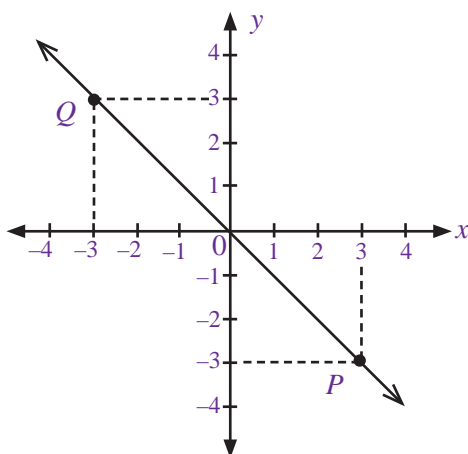
1. Tentukan apakah titik-titik berikut membentuk garis lurus atau tidak?
   a. $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(2, 2)$
   b. $D(2, -2)$, $E(1, -1)$, $F(0, 0)$
   c. $G(-2, 1)$, $H(1, 0)$, $I(4, 3)$
   d. $J(2, -2)$, $K(3, 0)$, $L(1, 1)$
2. Gambarkan garis lurus yang melalui titik $P(3, -3)$ dan $Q(-3, 3)$.

Jawab :

1. a. b.

Jadi, titik-titik *A*, *B*, dan *C* membentuk garis lurus

Jadi, titik-titik *D*, *E*, dan *F* membentuk garis lurus

c.

Jadi, titik-titik G, H, dan I tidak membentuk garis lurus

d.

Jadi, titik-titik J, K, dan L tidak membentuk garis lurus

2. Garis lurus yang melalui titik $P(3, –3)$ dan $Q(–3, 3)$ dapat digambar sebagai berikut.

Pierre de Fermat (1601–1665)

Pierre de Fermat adalah seorang pengacara asal Prancis yang menggemari matematika. Ia adalah orang pertama yang mengungkapkan bahwa persamaan-persamaan dapat ditunjukkan sebagai bentuk-bentuk atau bangun-bangun jika persamaan tersebut diletakkan pada sebuah grafik dengan sumbu-x dan sumbu-y. Grafik tersebut memiliki titik asal O, tempat sumbu-sumbu tersebut berpotongan, yaitu di titik (0, 0).

Sumber: *Ensiklopedia Matematika dan Peradaban Manusia*, 2002

2. Menggambarkan Persamaan Garis Lurus

Setelah kamu mempelajari materi sebelumnya, apa yang dapat kamu ketahui tentang persamaan garis lurus? Persamaan garis lurus adalah suatu persamaan yang jika digambarkan ke dalam bidang koordinat Cartesius akan membentuk sebuah garis lurus.

Cara menggambar persamaan garis lurus adalah dengan menentukan nilai x atau y secara acak. Perlu diingat bahwa dua titik sudah cukup untuk membuat garis lurus pada bidang koordinat Cartesius. Untuk lebih jelasnya, pelajari Contoh Soal 3.4

Gambarlah garis dengan persamaan:

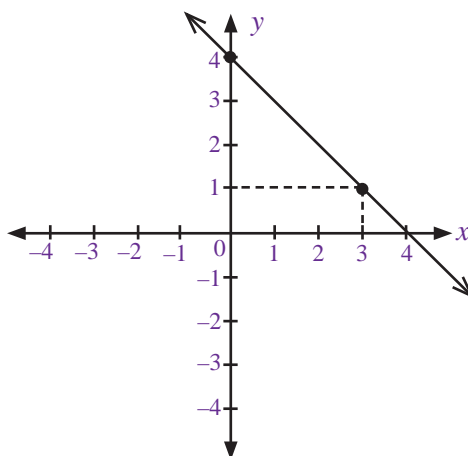
a. $x + y = 4$,

b. $x = 2y$

Jawab :

a. Langkah pertama adalah menentukan nilai x dan y yang memenuhi persamaan $x + y = 4$.

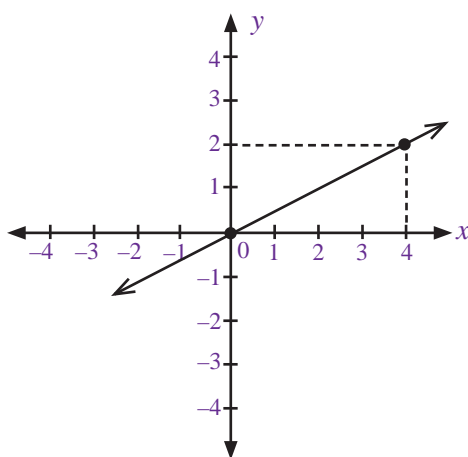
Misalkan: $x = 0$ maka $0 + y = 4 \Rightarrow y = 4$, sehingga diperoleh titik koordinat (0, 4),
$x = 3$ maka $3 + y = 4 \Rightarrow y = 1$, sehingga diperoleh titik koordinat (3, 1).

Kemudian, dari dua titik koordinat tersebut dapat digambarkan garis lurus seperti berikut.

Plus +

Untuk memudahkan menggambar persamaan garis lurus, tentukan titik yang memotong sumbu-y dengan cara memisalkan $x = 0$. Kemudian, tentukan titik yang memotong sumbu-x dengan cara memisalkan $y = 0$.

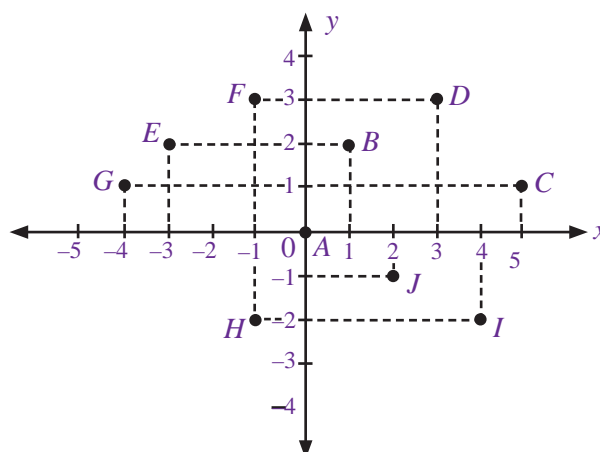
b. Seperti sebelumnya, tentukan dahulu nilai x atau y yang memenuhi persamaan $x = 2y$.

Misalkan: $x = 0$ maka $0 = 2y \Rightarrow y = 0$, sehingga diperoleh titik koordinat (0, 0),
$x = 4$ maka $4 = 2y \Rightarrow y = 2$, sehingga diperoleh titik koordinat (4, 2)

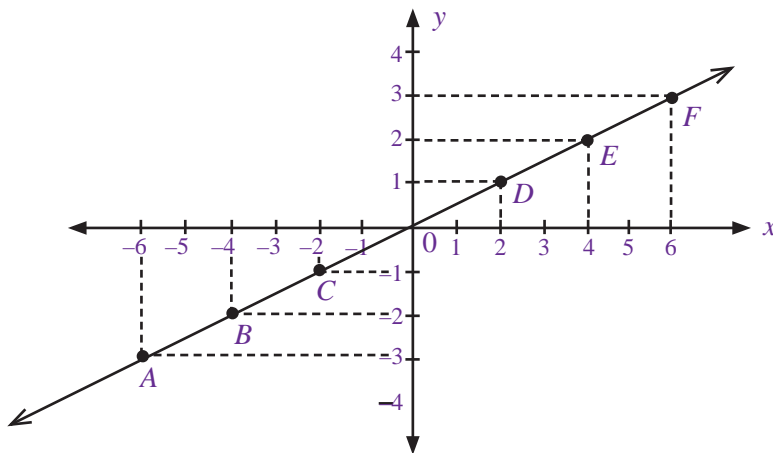
Kedua titik tersebut dapat digambar menjadi sebuah garis lurus sebagai berikut.

Uji Kompetensi 3.1

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Tentukan absis dan ordinat dari titik-titik koordinat berikut.
   a. $A(2, 3)$ d. $D(0, 8)$
   b. $B(–2, –3)$ e. $E(–5, 0)$
   c. $C(4, –7)$
2. Perhatikan gambar bidang koordinat Cartesius di samping, kemudian tentukan titik koordinat dari masing-masing titik tersebut.

A (..., ...)	F (..., ...)
B (..., ...)	G (..., ...)
C (..., ...)	H (..., ...)
D (..., ...)	I (..., ...)
E (..., ...)	J (..., ...)

3. Dalam satu bidang koordinat Cartesius, gambarkan titik-titik berikut ini.
   a. $P(5, -2)$
   b. $Q(-3, -1)$
   c. $R(-4, 3)$
   d. $S(3, 5)$
   e. $T(0, -4)$
4. Buatlah garis lurus pada bidang koordinat Cartesius yang melalui titik-titik berikut.
   a. $A(0, 0)$ dan $B(1, 3)$
   b. $C(2, 1)$ dan $D(0, 3)$
   c. $E(-3, 2)$ dan $F(0, -1)$
   d. $G(4, -5)$ dan $H(-2, -2)$
   e. $I(3, 0)$ dan $J(0, 2)$
5. Gambarkan garis yang memiliki persamaan garis berikut.
   a. $x - y = 2$
   b. $y = 4x$
   c. $x + 3 = y$
   d. $x = \frac{1}{2}y$
   e. $y = 2x + 1$

B. Gradien

Coba kamu perhatikan dengan saksama Gambar 3.4 berikut ini.

Gambar 3.4
Garis lurus pada bidang koordinat Cartesius

Dari Gambar 3.4 terlihat suatu garis lurus pada bidang koordinat Cartesius. Garis tersebut melalui titik $A(-6, -3)$, $B(-4, -2)$, $C(-2, -1)$, $D(2, 1)$, $E(4, 2)$, dan $F(6, 3)$. Perbandingan antara ordinat (y) dan absis (x) untuk masing-masing titik tersebut adalah sebagai berikut.

- Titik A $(-6, -3) \Rightarrow \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$
- Titik B $(-4, -2) \Rightarrow \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$
- Titik C $(-2, -1) \Rightarrow \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$
- Titik D $(2, 1) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- Titik E $(4, 2) \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- Titik F $(6, 3) \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Perhatikan perbandingan ordinat dengan absis untuk setiap titik tersebut. Semua titik memiliki nilai perbandingan yang sama, yaitu $\frac{1}{2}$. Nilai tetap atau konstanta dari perbandingan ordinat dan absis ini disebut sebagai **gradien.** Biasanya gradien dilambangkan dengan m. Apa sebenarnya yang dimaksud dengan gradien? Coba kamu pelajari uraian berikut ini.

1. Pengertian Gradien

Pernahkah kamu mendaki gunung? Jika ya, kamu pasti akan menyusuri lereng gunung untuk dapat sampai ke puncak. Lereng gunung memiliki kemiringan tanah yang tidak sama, ada yang curam ada juga yang landai. Sama halnya dengan garis yang memiliki kemiringan tertentu. Tingkat kemiringan garis

inilah yang disebut **gradien**. Perhatikan kembali garis lurus pada Gambar 3.4, berdasarkan perbandingan ordinat dan absis maka tingkat kemiringan atau gradien garis tersebut adalah $\frac{1}{2}$.

2. Perhitungan Gradien

Ada berbagai cara untuk menghitung gradien dari suatu persamaan garis. Hal ini bergantung pada letak titik koordinat dan bentuk persamaan garis yang diberikan. Berikut ini akan diuraikan cara menghitung gradien berdasarkan titik koordinat atau bentuk persamaan garis.

a. Menghitung Gradien pada Persamaan Garis $y = mx$

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, gradien suatu garis dapat ditentukan melalui perbandingan antara ordinat dan absis sehingga dapat ditulis sebagai berikut.

$$\text{Gradien} = \frac{\text{ordinat}}{\text{absis}}$$

$$m = \frac{y}{x}$$

$$y = mx$$

Dari uraian ini terlihat bahwa nilai gradien dalam suatu persamaan garis sama dengan besar nilai konstanta m yang terletak di depan variabel x, dengan syarat, persamaan garis tersebut diubah terlebih dahulu ke dalam bentuk y = mx. Untuk lebih jelasnya, pelajarilah Contoh Soal 3.5

Problematika

Sumber: *Dokumentasi Penulis*

Gambar di atas memperlihatkan sebuah tangga dengan kemiringan tertentu. Tinggi ujung tangga pada tembok ke lantai adalah 4 m, sedangkan jarak ujung tangga pada lantai ke tembok adalah 3 m. Berapakah kemiringan tangga itu?

Contoh Soal 3.5

Tentukanlah gradien dari persamaan garis berikut.

a. $y = 2x$
b. $y = 3x$
c. $x = 2y$
d. $2x + 3y = 0$
e. $4x – 6y = 0$

Jawab :

a. Persamaan garis $y = 2x$ sudah memenuhi bentuk $y = mx$. Jadi, diperoleh $m = 2$.
b. Persamaan garis $y = –3x$ sudah memenuhi bentuk $y = mx$. Jadi, diperoleh $m = –3$.
c. Persamaan garis $x = 2y$ diubah terlebih dahulu menjadi bentuk $y = mx$ sehingga

$$x = 2y$$
$$y = \frac{x}{2}$$
$$y = \frac{1}{2}x$$

Persamaan garis $y = \frac{1}{2}x$ sudah memenuhi bentuk $y = mx$. Jadi, diperoleh $m = \frac{1}{2}$.

d. Persamaan garis $2x + 3y = 0$ diubah terlebih dahulu menjadi bentuk $y = mx$ sehingga

$$2x + 3y = 0$$
$$3y = –2x$$
$$y = \frac{-2x}{3}$$
$$y = \frac{-2}{3}x$$

Persamaan garis $y = \frac{-2}{3}x$ sudah memenuhi bentuk $y = mx$. Jadi, diperoleh $m = \frac{-2}{3}$.

e. Persamaan garis $4x - 6y = 0$ diubah terlebih dahulu menjadi bentuk $y = mx$ sehingga

$$4x - 6y = 0$$
$$6y = 4x$$
$$y = \frac{4x}{6}$$
$$y = \frac{2x}{3}$$
$$y = \frac{2}{3}x$$

Persamaan garis $y = \frac{2}{3}x$ sudah memenuhi bentuk $y = mx$. Jadi, diperoleh $m = \frac{2}{3}$

b. Menghitung Gradien pada Persamaan Garis $y = mx + c$

Sama halnya dengan perhitungan gradien pada persamaan garis $y = mx$, perhitungan gradien pada garis $y = mx + c$ dilakukan dengan cara menentukan nilai konstanta di depan variabel x. Untuk lebih jelasnya, coba kamu perhatikan Contoh Soal 3.6

Tentukanlah gradien dari persamaan garis berikut.

a. $y = 4x + 6$
b. $y = -5x - 8$
c. $2y = x + 12$
d. $3y = 6 + 9x$
e. $2 + 4y = 3x + 5$

Jawab :

a. Persamaan garis $y = 4x + 6$ sudah memenuhi bentuk $y = mx + c$. Jadi, nilai $m = 4$.

b. Persamaan garis $y = -5x - 8$ sudah memenuhi bentuk $y = mx + c$. Jadi, nilai $m = -5$.

c. Persamaan garis $2y = x + 12$ diubah terlebih dahulu menjadi bentuk $y = mx + c$ sehingga

$$2y = x + 12$$
$$y = \frac{x + 12}{2}$$
$$y = \frac{1}{2}x + 6$$

Jadi, nilai $m = \frac{1}{2}$.

d. Persamaan garis $3y = 6 + 9x$ diubah terlebih dahulu menjadi bentuk $y = mx + c$ sehingga

$$3y = 6 + 9x$$
$$y = \frac{6 + 9x}{3}$$
$$y = 2 + 3x$$
$$y = 3x + 2$$

Jadi, nilai $m = 3$.

e. Persamaan garis $2 + 4y = 3x + 5$ diubah terlebih dahulu menjadi bentuk $y = mx + c$ sehingga

$$2 + 4y = 3x + 5$$
$$4y = 3x + 5 - 2$$
$$4y = 3x + 3$$
$$y = \frac{3x + 3}{4}$$
$$y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

Jadi, nilai $m = \frac{3}{4}$

c. Menghitung Gradien pada Persamaan Garis $ax + by + c = 0$

Sama seperti sebelumnya, gradien pada persamaan garis $ax + by + c = 0$ dapat ditentukan dengan cara mengubah terlebih dahulu persamaan garis tersebut ke dalam bentuk $y = mx + c$. Kemudian, nilai gradien diperoleh dari nilai konstanta m di depan variabel x. Perhatikan Contoh Soal 3.7

Contoh Soal 3.7

Tentukanlah gradien dari persamaan garis berikut.

a. $x + 2y + 6 = 0$
b. $2x - 3y - 8 = 0$
c. $x + y - 10 = 0$
d. $4x + 5y = 9$
e. $2y - 6x + 1 = 0$

Jawab :

a. Persamaan garis $x + 2y + 6 = 0$ diubah terlebih dahulu menjadi bentuk $y = mx + c$ sehingga

$$x + 2y + 6 = 0$$
$$2y = -x - 6$$
$$y = \frac{-x-6}{2}$$
$$y = -\frac{1}{2}x - 3$$

Jadi, nilai $m = -\frac{1}{2}$.

b. Persamaan garis $2x - 3y - 8 = 0$ diubah terlebih dahulu menjadi bentuk $y = mx + c$ sehingga

$$2x - 3y - 8 = 0$$
$$-3y = -2x + 8$$
$$3y = 2x - 8$$
$$y = \frac{2x-8}{3}$$
$$y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$$

Jadi, nilai $m = \frac{2}{3}$.

c. Persamaan garis $x + y - 10 = 0$ diubah terlebih dahulu menjadi bentuk $y = mx + c$ sehingga

$$x + y - 10 = 0$$
$$y = -x + 10$$

Jadi, nilai $m = -1$.

d. Persamaan garis $4x + 5y = 9$ diubah terlebih dahulu menjadi bentuk $y = mx + c$ sehingga

$$4x + 5y = 9$$
$$5y = 9 - 4x$$
$$y = \frac{9-4x}{5}$$
$$y = \frac{9}{5} - \frac{4}{5}x$$
$$y = -\frac{4}{5}x + \frac{9}{5}$$

Jadi, nilai $m = -\frac{4}{5}$.

e. Persamaan garis $2y - 6x + 1 = 0$ diubah terlebih dahulu menjadi bentuk $y = mx + c$ sehingga

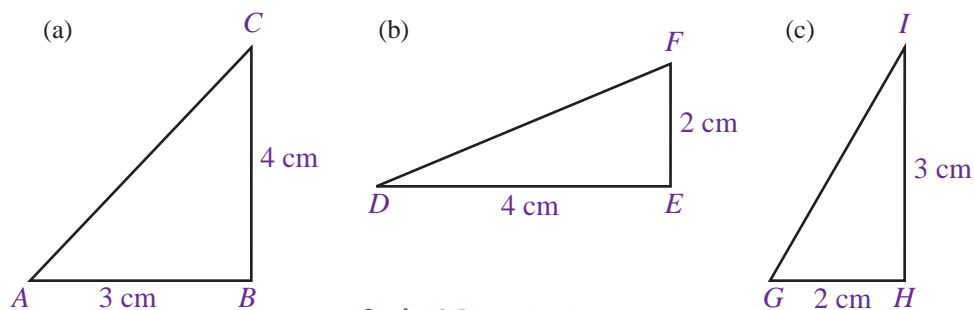
$$2y - 6x + 1 = 0$$
$$2y = 6x - 1$$
$$y = \frac{6x-1}{2}$$
$$y = \frac{6}{2}x - \frac{1}{2}$$
$$y = 3x - \frac{1}{2}$$

Jadi, nilai $m = 3$

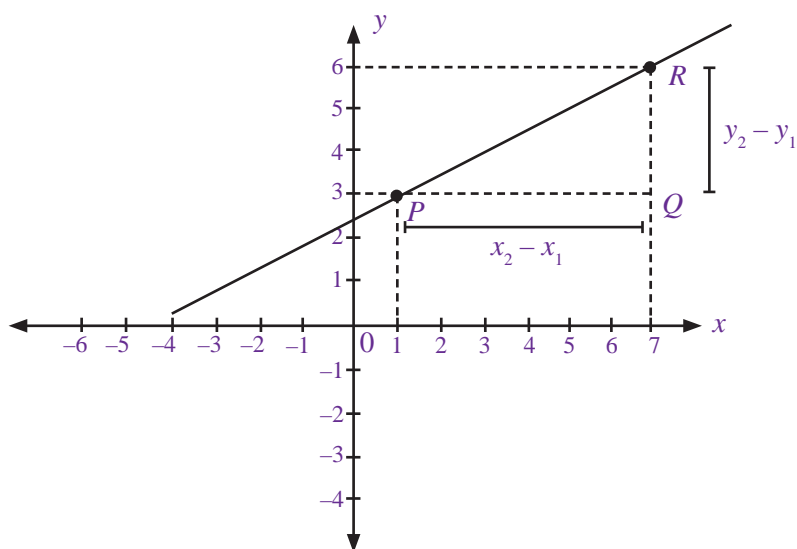
Plus +

Mencari gradien garis dengan persamaan $ax + by + c = 0$ adalah dengan menghitung nilai $\frac{-a}{b}$

d. Menghitung Gradien pada Garis yang Melalui Dua Titik

Coba kamu perhatikan Gambar 3.5 berikut.

Gambar 3.5 : Tiga buah segitiga

Gambar 3.5 menunjukkan tiga buah segitiga *ABC*, *DEF*, dan *GHI* yang memiliki sisi miring dengan tingkat kemiringan atau gradien yang berbeda-beda. Dengan menggunakan perbandingan ordinat dan absis, gradien untuk masing-masing segitiga dapat dihitung sebagai berikut.

- Segitiga *ABC* → Gradien $AC = \dfrac{\text{ordinat}}{\text{absis}} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{4 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = \dfrac{4}{3}$
- Segitiga *DEF* → Gradien $DF = \dfrac{\text{ordinat}}{\text{absis}} = \dfrac{EF}{DE} = \dfrac{2 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = \dfrac{1}{2}$
- Segitiga *GHI* → Gradien $GI = \dfrac{\text{ordinat}}{\text{absis}} = \dfrac{HI}{GH} = \dfrac{3 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = \dfrac{3}{2}$

Gambar 3.6 : Menentukan gradien

Sekarang, perhatikan Gambar 3.6 . Gambar tersebut menunjukkan sebuah garis lurus pada bidang koordinat yang melalui titik *P* dan *R*. Untuk mencari gradien garis tersebut, kamu tinggal menentukan gradien *PR* pada segitiga *PQR*. Dengan menggunakan perbandingan ordinat dan absis, akan diperoleh gradien garis yang melalui titik *P* dan *R*, yaitu:

$$\begin{aligned}\text{Gradien } PR &= \frac{\text{ordinat}}{\text{absis}} \\ &= \frac{QR}{PQ} \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{6-3}{7-1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Jadi, gradien garis yang melalui $P(1, 3)$ dan $R(7, 6)$ pada Gambar 3.6 adalah $\frac{1}{2}$. Dari uraian tersebut diperoleh rumus umum untuk mencari gradien pada garis yang melalui dua titik, sebagai berikut.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Untuk lebih jelasnya, perhatikan Contoh Soal 3.8 berikut ini.

Contoh Soal 3.8

Tentukanlah gradien garis yang melalui titik-titik koordinat berikut.

a. $A(2, 2)$ dan $B(4, 4)$
b. $C(3, 1)$ dan $D(2, 4)$
c. $E(-2, -3)$ dan $F(-4, 2)$

Cerdas Berpikir

Sebuah segitiga siku-siku terbentuk dari 3 titik koordinat, yaitu: A(a, 5), B(–2, 3), dan C(3, b). Tentukan kemungkinan segitiga yang terbentuk, kemudian cari gradiennya. Petunjuk: kerjakan dengan cara menggambar

Jawab :

a. Untuk titik $A(2, 2)$ maka $x_1 = 2$, $y_1 = 2$.
Untuk titik $B(4, 4)$ maka $x_2 = 4$, $y_2 = 4$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$$

Jadi, gradiennya adalah 1.

b. Untuk titik $C(3, 1)$ maka $x_1 = 3$, $y_1 = 1$.
Untuk titik $D(2, 4)$ maka $x_2 = 2$, $y_2 = 4$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-1}{2-3} = \frac{3}{-1} = -3$$

Jadi, gradiennya adalah –3.

c. Untuk titik $E(-2, -3)$ maka $x_1 = -2$, $y_1 = -3$.
Untuk titik $F(-4, 2)$ maka $x_2 = -4$, $y_2 = 2$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-(-3)}{-4-(-2)} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$$

Jadi, gradiennya adalah $-\frac{5}{2}$

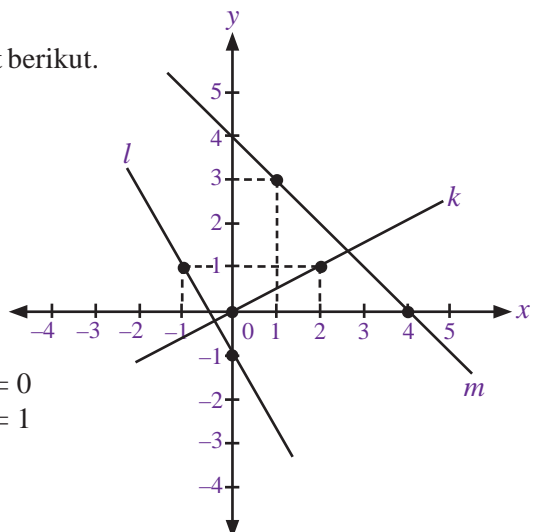
Perhatikan garis pada bidang koordinat berikut.
Tentukan:

a. gradien garis k,
b. gradien garis l,
c. gradien garis m.

Jawab :

a. Dari gambar di samping kanan, terlihat bahwa garis k melalui titik (0, 0) dan (2, 1).
Untuk titik (0, 0) maka $x_1 = 0$, $y_1 = 0$
Untuk titik (2, 1) maka $x_2 = 2$, $y_2 = 1$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$$

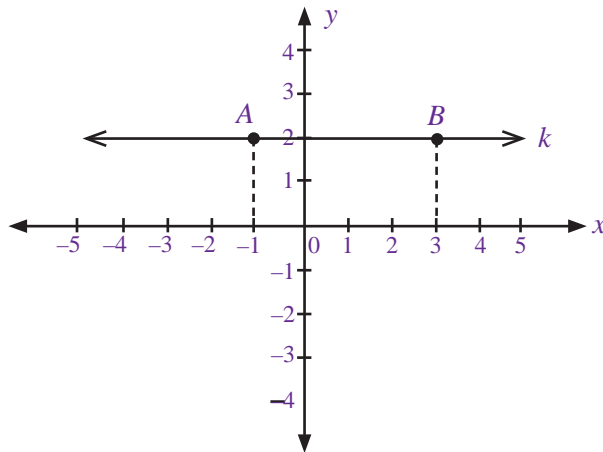
Jadi, gradien garis k adalah $\frac{1}{2}$.

b. Dari gambar terlihat bahwa garis l melalui titik (–1, 1) dan (0, –1).
Untuk titik (–1, 1) maka x_1 = –1, y_1 = 1.
Untuk titik (0, 1) maka x_2 = 0, y_2 = –1.
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-1}{0-(-1)} = \frac{-2}{1} = -2$
Jadi, gradien garis l adalah –2.

c. Dari gambar terlihat bahwa garis *m* melalui titik (4, 0) dan (1, 3).
Untuk titik (4, 0) maka x_1 = 4, y_1 = 0.
Untuk titik (1, 3) maka x_2 = 1, y_2 = 3.
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-0}{1-4} = \frac{3}{-3} = -1$
Jadi, gradien garis *m* adalah –1 ■

3. Sifat-Sifat Gradien

Ada beberapa sifat gradien yang perlu kamu ketahui, di antaranya adalah gradien garis yang sejajar dengan sumbu-*x*, gradien garis yang sejajar dengan sumbu-*y*, gradien dua garis yang sejajar, dan gradien dua garis yang saling tegak lurus. Berikut ini akan diuraikan sifat-sifat gradien tersebut.

a. Gradien Garis yang Sejajar dengan Sumbu-*x*

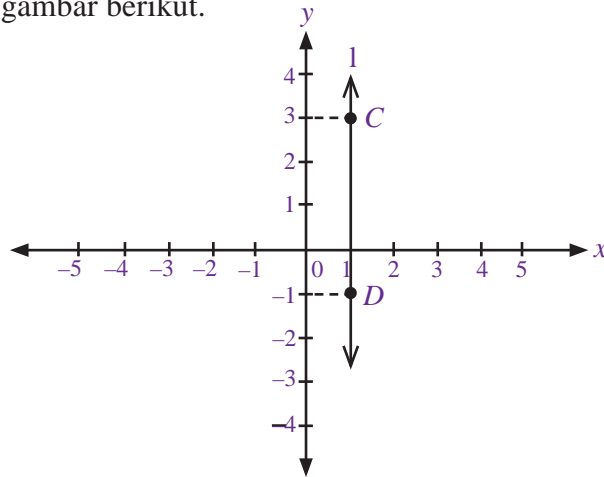
Perhatikan gambar berikut.

Gambar 3.7 : Garis yang melalui 2 titik dan sejajar sumbu-*x*.

Pada Gambar 3.7 , terlihat garis *k* yang melalui titik *A*(–1, 2) dan *B*(3, 2). Garis tersebut sejajar dengan sumbu-*x*. Untuk menghitung gradien garis *k*, gunakan cara sebagai berikut.
Untuk titik *A*(–1, 2) maka x_1 = –1, y_1 = 2.
Untuk titik *B*(3, 2) maka x_2 = 3, y_2 = 2.
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} = \frac{2-2}{3-(-1)} = \frac{0}{4} = 0$

Coba kamu periksa titik-titik lain pada garis k dan hitunglah gradiennya. Apakah nilai gradiennya sama dengan 0? Uraian tersebut memperjelas tentang gradien garis yang sejajar dengan sumbu-*x*, yaitu sebagai berikut.

Jika garis sejajar dengan sumbu- *x* maka nilai gradiennya adalah nol.

b. Gradien garis yang sejajar dengan sumbu-*y*

Perhatikan gambar berikut.

Gambar 3.8 : Garis *l* yang melalui titik *C* dan *D* dan sejajar sumbu-*y*.

Pada Gambar 3.8 , garis l yang melalui titik $C(1, 3)$ dan $D(1, –1)$. letaknya sejajar dengan sumbu-*y*. Gradien garis tersebut adalah sebagai berikut.

Untuk titik $C(1, 3)$ maka $x_1 = 1$, $y_1 = 3$.

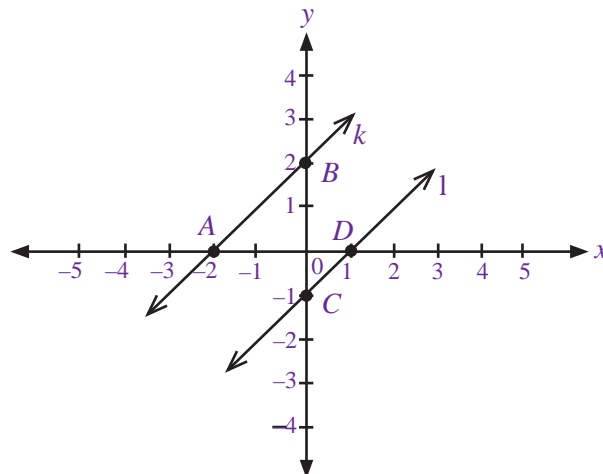
Untuk titik $D(1, –1)$ maka $x_2 = 1$, $y_2 = –1$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 3}{1 - 1} = \frac{-4}{0} = \sim$$

Perhitungan di atas, memperjelas sifat gradien berikut.

Jika garis sejajar dengan sumbu-y maka garis tersebut tidak memiliki gradien.

c. Gradien Dua Garis yang Sejajar

Sekarang coba kamu perhatikan Gambar 3.9 .

Gambar 3.8 : Garis *k* dan *l* yang sejajar.

Garis *k* dan *l* merupakan dua garis yang sejajar. Bagaimana gradien kedua garis tersebut? Perhatikan uraian berikut.

- Garis k melalui titik $A(–2, 0)$ dan $B(0, 2)$.

  Untuk titik $A(–2, 0)$ maka $x_1 = –2$, $y_1 = 0$.

  Untuk titik $B(0, 2)$ maka $x_2 = 0$, $y_2 = 2$.

  $$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{0 - (-2)} = \frac{2}{2} = 1$$

- Garis l melalui titik $C(0, -1)$ dan $D(1, 0)$.

  Untuk titik $C(0, -1)$ maka $x_1 = 0$, $y_1 = -1$.

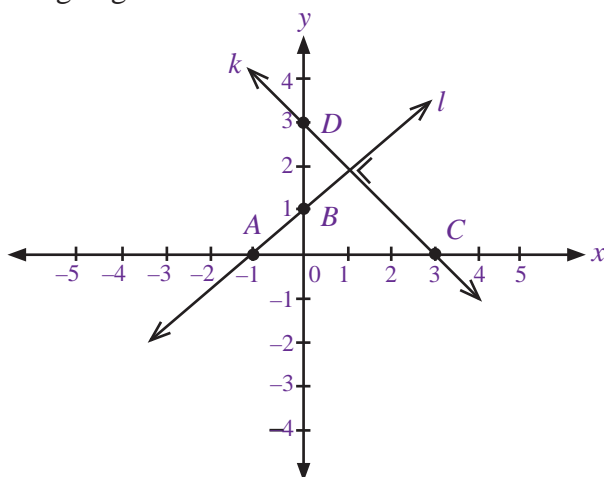
  Untuk titik $D(1, 0)$ maka $x_2 = 1$, $y_2 = 0$.

  $$m_{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} = \frac{0 - (-1)}{1 - 0} = \frac{1}{1} = 1$$

  Dari uraian tersebut terlihat bahwa garis *k* dan *l* memiliki gradien yang sama.

> Setiap garis yang sejajar memiliki gradien yang sama.

d. Gradien Dua Garis yang Tegak Lurus

Coba kamu perhatikan Gambar 3.10 . Pada gambar tersebut terlihat garis *k* tegak lurus dengan garis l.

Gambar 3.10 : Garis *k* dan *l* yang saling tegak lurus.

Gradien kedua garis tersebut dapat dihitung dengan cara sebagai berikut.

- Garis k melalui titik $C(3, 0)$ dan $D(0, 3)$.

  Untuk titik $C(3, 0)$ maka $x_1 = 3$, $y_1 = 0$.

  Untuk titik $D(0, 3)$ maka $x_2 = 0$, $y_2 = 3$.

  $$m_{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 0}{0 - 3} = \frac{3}{-3} = -1.$$

- Garis l melalui titik $A(-1, 0)$ dan $B(0, 1)$.

  Untuk titik $A(-1, 0)$ maka $x_1 = -1$, $y_1 = 0$.

  Untuk titik $B(0, 1)$ maka $x_2 = 0$, $y_2 = 1$.

  $$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{0 - (-1)} = \frac{1}{1} = 1$$

  Hasil kali kedua gradien tersebut adalah

  $m_{AB} \times m_{CD} = 1 \times -1 = -1$

  Uraian tersebut memperjelas hal berikut:

> Hasil kali antara dua gradien dari garis yang saling tegak lurus adalah –1.

Untuk lebih jelasnya, coba kamu perhatikan dan pelajari contoh-contoh soal berikut.

Contoh Soal 3.10

Tentukan apakah garis lurus berikut sejajar dengan sumbu-x atau sumbu-y.

a. Garis k melalui $A(2, -5)$ dan $B(2, 4)$
b. Garis l melalui $C(3, 1)$ dan $D(-2, 1)$
c. Garis m melalui $E(1, 4)$ dan $F(0, 4)$

Jawab :

a. Gradien garis k, yaitu:
Dari titik $A(2, -5)$ maka $x_1 = 2$, $y_1 = -5$
Dari titik $B(2, 4)$ maka $x_2 = 2$, $y_2 = 4$
$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-5)}{2-2} = \frac{9}{0} = \sim$$
Jadi, garis k sejajar dengan sumbu-y.

b. Gradien garis l, yaitu:
Dari titik $C(3, 1)$ maka $x_1 = 3$, $y_1 = 1$
Dari titik $D(-2, 1)$ maka $x_2 = -2$, $y_2 = 1$
$$m_{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-1}{-2-3} = \frac{0}{-5} = 0$$
Jadi, garis l sejajar dengan sumbu-x.

c. Gradien garis m, yaitu:
Dari titik $E(1, 4)$ maka $x_1 = 1$, $y_1 = 4$
Dari titik $F(0, 4)$ maka $x_2 = 0$, $y_2 = 4$
$$m_{EF} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-4}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0$$
Jadi, garis m sejajar dengan sumbu-x

Tugas 3.1

Kamu telah mengetahui sifat gradien dari dua garis yang sejajar dan saling tegak lurus. Sekarang, bagaimana dengan gradien dari dua garis yang berimpit? Diskusikanlah bersama temanmu untuk mengetahui jawabannya, kemudian laporkan hasilnya kepada gurumu.

Contoh Soal 3.11

Tentukan apakah kedua garis berikut sejajar atau saling tegak lurus?

a. Garis p yang melalui $A(4, 2)$ dan $B(0, 0)$ dan garis q yang melalui $C(-2, 4)$ dan $D(0, 0)$.
b. Garis r yang melalui $E(2, -3)$ dan $F(8, 6)$ dan garis s yang melalui $G(4, 6)$ dan $H(0, 0)$.

Jawab :

a. • Mencari gradien garis p, yaitu:
Untuk titik $A(4, 2)$ maka $x_1 = 4$, $y_1 = 2$.
Untuk titik $B(0, 0)$ maka $x_2 = 0$, $y_2 = 0$.
$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-2}{0-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$
• Mencari gradien garis q, yaitu:
Untuk titik $C(-2, 4)$ maka $x_1 = -2$, $y_1 = 4$.
Untuk titik $D(0, 0)$ maka $x_2 = 0$, $y_2 = 0$.
$$m_{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-4}{0-(-2)} = \frac{-4}{2} = -2$$
Dari kedua perhitungan tersebut diperoleh $m_{AB} \times m_{CD} = \frac{1}{2} \times -2 = -1$.
Jadi, garis p dan q saling tegak lurus.

b. • Cari gradien garis r, yaitu:
Untuk titik $E(2, -3)$ maka $x_1 = 2$, $y_1 = -3$
Untuk titik $F(8, 6)$ maka $x_2 = 8$, $y_2 = 6$
$$m_{EF} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-3)}{8-2} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

- Mencari gradien garis s, yaitu:
  Untuk titik $G(4, 6)$ maka $x_1 = 4$, $y_1 = 6$.
  Untuk titik $H(0, 0)$ maka $x_2 = 0$, $y_2 = 0$.
  $$m_{GH} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 6}{0 - 4} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

Dari kedua perhitungan tersebut ternyata diperoleh $m_{EF} = m_{GH}$.
Jadi, garis r dan s merupakan garis-garis yang sejajar.

Garis k memiliki gradien $\frac{1}{3}$. Tentukan gradien garis l jika garis tersebut:

a. sejajar dengan garis k,
b. tegak lurus dengan garis l.

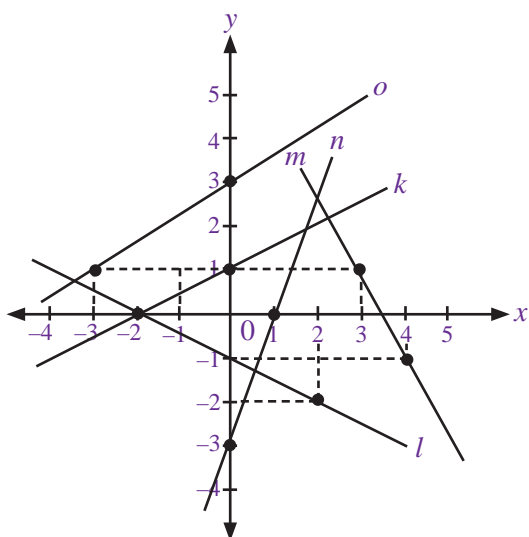
Jawab :

a. Diketahui $m_k = \frac{1}{3}$. Jika garis l sejajar dengan garis k maka
   $m_l = m_k = \frac{1}{3}$.
b. Diketahui $m_k = \frac{1}{3}$. Jika gradien l tegak lurus dengan garis k maka
   $m_k \times m_l = -1$
   $\frac{1}{3} \times m_l = -1$
   $m_l = -1 \times \frac{3}{1}$
   $m_l = -3$

Uji Kompetensi 3.2

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Tentukanlah gradien dari persamaan garis berikut.
   a. $y = x$
   b. $y = -5x$
   c. $2y = 7x$
   d. $-3y = -8x$
   e. $4y = 12x$
2. Tentukanlah gradien (m) dan konstanta (c) dari persamaan garis berikut.
   a. $y = -3x + 6$
   b. $y = \frac{3}{2}x - 8$
   c. $3y = 7 + 4x$
   d. $6y = 9x - 2$
   e. $4y = 2x + 5$
3. Tentukanlah gradien (m) dan konstanta (c) dari persamaan garis berikut.
   a. $x + 2y + 3 = 0$
   b. $5x - 4y - 3 = 0$
   c. $7x + 6y + 4 = 0$
   d. $3x + 3y - 6 = 0$
   e. $5x - y + 1 = 0$
4. Tentukanlah gradien dari garis yang melalui titik-titik koordinat berikut ini.
   a. $P(2, 6)$ dan $Q(4, -8)$
   b. $K(-2, -5)$ dan $L(-3, 1)$
   c. $X(0, 8)$ dan $Y(-2, -5)$
   d. $M(9, -1)$ dan $N(6, -8)$
   e. $A(6, 6)$ dan $B(0, 0)$

5. Perhatikan gambar bidang koordinat Cartesius di bawah ini. Tentukanlah gradien dari:
   a. garis k,
   b. garis l,
   c. garis m,
   d. garis n,
   e. garis o.

6. Tentukan apakah garis berikut sejajar dengan sumbu-x atau sumbu-y?
   a. Garis p yang melalui $A(8, –3)$ dan $B(5, –3)$
   b. Garis q yang melalui $C(6, 0)$ dan $D(–2, 0)$
   c. Garis r yang melalui $E(–1, 1)$ dan $F(–1, 4)$
   d. Garis s yang melalui $G(0, 6)$ dan $H(0, –3)$
   e. Garis t yang melalui $I(2, –4)$ dan $J(–3, –4)$

7. Tentukan apakah pasangan garis berikut sejajar atau saling tegak lurus?
   a. Garis a yang melalui $A(7, –3)$ dan $B(11, 3)$ garis b yang melalui $C(–9, 0)$ dan $D(–5, 6)$
   b. Garis m yang melalui $P(3, 5)$ dan $Q(0, 0)$ garis n yang melalui $R(0, 0)$ dan $S(–5, 3)$

8. Gradien garis m adalah 2. Tentukan gradien garis n jika:
   a. garis m sejajar dengan garis n,
   b. garis m saling tegak lurus dengan garis n.

9. Sebuah garis lurus yang memiliki gradien $-\frac{5}{8}$ melalui titik $P(–3, 2n)$ dan $Q(5, n – 3)$.
   a. Tentukan nilai n.
   b. Tentukan koordinat P dan Q.
   c. Jika garis k sejajar dengan garis tersebut, tentukan gradien garis k.
   d. Jika garis l saling tegak lurus dengan garis tersebut, tentukan gradien garis l.

10. Diketahui sebuah garis lurus memiliki persamaan $y = 2x + 5$. Tentukan apakah persamaan garis tersebut membentuk garis yang sejajar atau saling tegak lurus dengan:
    a. $y = 2x – 8$
    b. $4x – 2y + 6 = 0$
    c. $3y = 6x – 1$
    d. $y = -\frac{1}{2}z + 9$
    e. $7x – 14y + 2 = 0$

C. Menentukan Persamaan Garis Lurus

Pada subbab sebelumnya, kamu telah mempelajari bagaimana menggambar persamaan garis lurus pada bidang koordinat Cartesius dan menentukan gradien dari suatu persamaan garis. Sekarang, bagaimana menentukan persamaan garis dari suatu titik atau gradien?

Masih ingatkah kamu tentang gradien yang diperoleh dari perbandingan ordinat dan absis? Bentuk tersebut dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\text{Gradien} = \frac{\text{ordinat}}{\text{absis}}$$

$$m = \frac{y}{x}$$

$$y = mx$$

Bentuk $y = mx$ merupakan bentuk persamaan garis lurus sederhana. Dikatakan sebagai bentuk sederhana karena garis yang dibentuk oleh persamaan garis tersebut selalu melalui titik pusat koordinat. Untuk lebih jelasnya, perhatikan Contoh Soal 3.13

Contoh Soal 3.13

Tentukan persamaan garis untuk garis yang melalui titik O (0, 0) dan memiliki:

a. gradien 2,
b. gradien –3,
c. gradien 1.

Jawab :

a. $y = mx$ maka $y = (2)x \Rightarrow y = 2x$
b. $y = mx$ maka $y = (-3)x \Rightarrow y = -3x$
c. $y = mx$ maka $y = (1)x \Rightarrow y = x$

Adapun bentuk umum dari persamaan garis lurus dapat dituliskan sebagai berikut.

$$y = mx + c$$

Persamaan garis ini hampir sama dengan bentuk sederhananya, namun diberi tambahan konstanta (diberi lambang c). Hal ini menunjukkan bahwa garis yang dibentuk oleh persamaan garis tersebut tidak akan melalui titik O(0, 0).

Setelah kamu memahami bentuk sederhana dan bentuk umum persamaan garis, berikut ini akan diuraikan bagaimana menentukan sebuah persamaan garis dari titik koordinat atau gradien.

Plus +

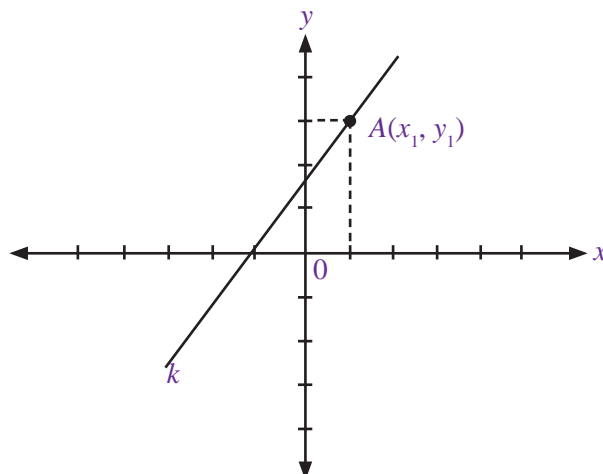
Persamaan garis lurus disebut juga *fungsi linier*.

1. Menentukan Persamaan Garis dari Gradien dan Titik Koordinat

Sekarang, coba kamu perhatikan Gambar 3.1. Gambar tersebut menunjukkan sebuah garis k pada bidang koordinat Cartesius. Garis tersebut melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan tidak melalui titik pusat koordinat sehingga persamaan garis pada Gambar 3.11 dapat dituliskan:

$$y_1 = mx_1 + c \text{ ....(1)}$$

Adapun bentuk umum persamaan garis yang tidak melalui titik pusat koordinat dituliskan:

$$y = mx + c \text{ ....(2)}$$

Gambar 3.11]: Garis *k* yang melalui titik *A*(*x*, *y*).

Jika ditentukan selisih dari persamaan (2) dan persamaan (1) maka diperoleh:

$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ y_1 &= mx_1 + c \quad - \\ \hline y - y_1 &= mx - mx_1 + c - c \\ y - y_1 &= mx - mx_1 \\ y - y_1 &= m(x - x_1) \end{aligned}$$

Selanjutnya diperoleh rumus umum untuk menentukan persamaan garis jika diketahui gradien dan titik koordinat, yaitu:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Untuk lebih jelasnya, coba kamu perhatikan dan pelajari Contoh Soal 3.14 dan Contoh Soal 3.15

Solusi Matematika

Persamaan garis yang sejajar dengan garis $2x + 3y + 6 = 0$ dan melalui titik $(-2, 5)$ adalah ....

a. $3x + 2y - 4 = 0$
b. $3x - 2y + 16 = 0$
c. $3y + 2x - 11 = 0$
d. $3y - 2x - 19 = 0$

Jawab:
Gradien garis $2x + 3y + 6 = 0$ adalah
$2x + 3y + 6 = 0$ maka
$3y = 6 - 2x$

$$y = 2 - \frac{2}{3}x$$

Jadi, gradien garis $2x + 3y + 6 = 0$ adalah $-\frac{2}{3}$.

Syarat dua garis sejajar adalah gradiennya sama.
Persamaan garis yang melalui titik $(-2, 5)$ dan bergradien $-\frac{2}{3}$ adalah

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 5 = -\frac{2}{3}(x + 2)$

$y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} + 5$

$3y = -2x + 11$ atau $3y + 2x - 11 = 0$

Jadi, persamaan garis yang sejajar dengan $2x + 3y + 6 = 0$ dan melalui titik $(-2, 5)$ adalah $3y + 2x - 11 = 0$

Jawaban: c

Soal UN, 2007

Contoh Soal 3.14

Tentukan persamaan garis yang melalui titik $P(3, 5)$ dan memiliki gradien -2.

Jawab :
Untuk titik $P(3, 5)$ maka $x_1 = 3$, $y_1 = 5$.
Dengan menggunakan rumus umum, diperoleh persamaan garis:

$$\begin{aligned} \Rightarrow y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 5 &= -2(x - 3) \\ y - 5 &= -2x + 6 \\ y &= -2x + 6 + 5 \\ y &= -2x + 11 \text{ atau } 2x + y - 11 = 0 \end{aligned}$$

Contoh Soal 3.15

Tentukan persamaan garis yang melalui:
a. titik $K(-2, -4)$ dan sejajar dengan garis $3x + y - 5 = 0$,
b. titik $R(1, -3)$ dan sejajar dengan garis yang melalui titik $A(4, 1)$ dan $B(-1, 2)$,
c. titik $L(5, 1)$ dan tegak lurus dengan garis $x - 2y + 3 = 0$.

Jawab :
a.
- Langkah pertama, tentukan gradien garis $3x + y - 5 = 0$.
  $3x + y - 5 = 0$
  $y = -3x + 5$
  diperoleh $m = -3$.
- Oleh karena garis h sejajar dengan garis $3x + y - 5 = 0$ maka garis h memiliki gradien yang sama, yaitu $m = -3$.
  Garis h melalui $K(-2, -4)$ maka $x_1 = -2$, $y_1 = -4$.
- Langkah kedua, tentukan persamaan garis h sebagai berikut

$$\begin{aligned} \Rightarrow y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - (-4) &= -3(x - (-2)) \\ y + 4 &= -3x - 6 \\ y &= -3x - 6 - 4 \\ y &= -3x - 10 \end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis h adalah $y = -3x - 10$ atau $3x + y + 10 = 0$

b. • Langkah pertama, tentukan gradien garis yang melalui titik $A(4, -1)$ dan $B(-1, 2)$.

Untuk titik $A(4, -1)$ maka $x_1 = 4$, $y_1 = -1$.

Untuk titik $B(-1, 2)$ maka $x_2 = -1$, $y_2 = 2$.

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-(-1)}{-1-4} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$$

• Oleh karena garis h sejajar dengan garis yang melalui titik A dan B maka garis h yang melalui titik R (1, –3) memiliki gradien yang sama dengan garis AB yaitu

$$m_h = m_{AB} = -\frac{3}{5}.$$

Untuk titik $R(1, -3)$ maka $x_1 = 1$, $y_1 = -3$

• Langkah kedua, tentukan persamaan garis h dengan rumus

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$
$$y - (-3) = -\frac{3}{5}\,(x - 1)$$
$$y + 3 = -\frac{3}{5}x + \frac{3}{5}$$
$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{3}{5} - 3$$
$$y = -\frac{3}{5}x - \frac{12}{5} \text{ atau } \frac{3}{5}x + y + \frac{12}{5} = 0 \text{ atau } 3x + 5y + 12 = 0$$

Jadi, persamaan garis h adalah $3x + 5y + 12 = 0$

c. • Langkah pertama, tentukan gradien garis $x - 2y + 3 = 0$.

$$x - 2y + 3 = 0$$
$$-2y = -x - 3$$
$$2y = x + 3$$
$$y = \frac{x+3}{2}$$
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

diperoleh $m = \frac{1}{2}$.

• Oleh karena h tegak lurus dengan garis $x - 2y + 3 = 0$ maka gradien garis h yang melalui titik $L(5, 1)$ adalah

$$m_L \cdot m = -1$$
$$m_L \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -1$$
$$m_L = -2$$

• Langkah kedua, tentukan persamaan garis $m_L = m_h$ = gradien garis h melalui titik $L(5, 1)$ dengan h melalui gradien $m = -2$.

Untuk titik $L(5, 1)$ maka $x_1 = 5$, $y_1 = 1$.

$$y - y_1 = \text{m}\,(x - x_1)$$
$$y - 1 = -2\,(x - 5)$$
$$y - 1 = -2x + 10$$
$$y = -2x + 10 + 1$$
$$y = -2x + 11 \text{ atau } 2x + y - 11 = 0$$

Jadi, persamaan garisnya h adalah $y = -2x + 11$ atau $2x + y - 11 = 0$

Diketahui garis g dengan persamaan $y = 3x + 1$. Garis h sejajar dengan garis g dan melalui titik A (2, 3) maka garis h mempunyai persamaan ....

a. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$

b. $y = -\frac{3}{2}x + 6$

c. $y = 3x - 3$

d. $y = 3x + 3$

Jawab:
- Gradien garis $y = 3x + 1$ adalah 3.
- Garis h sejajar dengan garis g, sehingga gradiennya sama, yaitu $m = 3$.
- Garis h melalui titik (2, 3), sehingga persamaan garisnya:
  $y - y_1 = \text{m}\,(x - x_1)$
  $y - 3 = 3\,(x - 2)$
  $y - 3 = 3x - 6$
  $y = 3x - 3$

Jawaban: c

Soal UAN SLTP, 2001

2. Menentukan Persamaan Garis yang Melalui Dua Titik

Pada bagian sebelumnya, kamu telah mempelajari cara menentukan persamaan garis yang melalui satu titik koordinat dan gradiennya diketahui. Sekarang, kamu akan mempelajari bagaimana menentukan persamaan garis yang melalui dua titik. Caranya hampir sama dengan rumus umum yang telah dipelajari sebelumnya.

Coba kamu perhatikan uraian berikut :

- $y - y_1 = m(x - x_1)$ adalah rumus umum persamaan garis dari gradien dan titik koordinat.
- $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ adalah rumus gradien dari dua titik koordinat.

Dari kedua rumus tersebut, dapat diuraikan sebagai berikut

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)}$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Jadi, rumus untuk menentukan persamaan garis yang melalui dua titik koordinat adalah

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Untuk lebih jelasnya, coba kamu perhatikan Contoh Soal 3.16

Contoh Soal 3.16

Tentukan persamaan garis yang melalui titik-titik koordinat berikut.

a. A (3, 3) dan B (2, 1)
b. C (–1, 4) dan D (1, 3)
c. E (6, 10) dan F (–5, 2)

Jawab :

a. Untuk titik A (3, 3) maka $x_1 = 3$ dan $y_1 = 3$.
Untuk titik B (2, 1) maka $x_2 = 2$ dan $y_2 = 1$.
Persamaan yang diperoleh:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 3}{1 - 3} = \frac{x - 3}{2 - 3}$$

$$\frac{y - 3}{-2} = \frac{x - 3}{-1}$$

Solusi Matematika

Persamaan garis lurus yang melalui titik (2, 1) dan (–2, –7) adalah ....

a. $y = -2x + 5$
b. $y = 2x - 3$
c. $y = 3x - 5$
d. $y = -3x + 7$

Jawab:
Untuk titik (2, 1) maka $x_1 = 2$ dan $y_1 = 1$.
Untuk titik (–2, –7) maka $x_2 = -2$ dan $y_2 = -7$.
Persamaan garis dicari dengan:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 1}{-7 - 1} = \frac{x - 2}{-2 - 2}$$

$$\frac{y - 1}{-8} = \frac{x - 2}{-4}$$

$$-4(y - 1) = -8(x - 2)$$

$$-4y + 4 = -8x + 16$$

$$-4y = -8x + 12$$

$$y = 2x - 3$$

Jawaban: b

EBTANAS, 1996

$-1 (y - 3) = -2 (x - 3)$
$-y + 3 = -2x + 6$
$2x - y + 3 - 6 = 0$
$2x - y - 3 = 0$

Jadi, persamaan garisnya adalah $2x - y - 3 = 0$.

b. Untuk titik C (–1, 4) maka $x_1 = -1$ dan $y_1 = 4$
Untuk titik D (1, 3) maka $x_2 = 1$ dan $y_2 = 3$
Persamaan garis yang diperoleh:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$
$$\frac{y - 4}{3 - 4} = \frac{x - (-1)}{1 - (-1)}$$
$$\frac{y - 4}{-1} = \frac{x + 1}{2}$$

$2(y - 4) = -1 (x + 1)$
$2y - 8 = -x - 1$
$x + 2y - 8 + 1 = 0$
$x + 2y - 7 = 0$

Jadi, persamaan garisnya adalah $x + 2y - 7 = 0$.

c. Untuk titik E (6, 10) maka $x_1 = 6$ dan $y_1 = 10$
Untuk titik F(–5, 2) maka $x_2 = -5$ dan $y_2 = 2$
Persamaan garis yang diperoleh:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$
$$\frac{y - 10}{2 - 10} = \frac{x - 6}{-5 - 6}$$
$$\frac{y - 10}{-8} = \frac{x - 6}{-11}$$

$-11(y - 10) = -8 (x - 6)$
$-11y + 110 = -8x + 48$
$8x - 11y + 110 - 48 = 0$
$8x - 11y + 62 = 0$

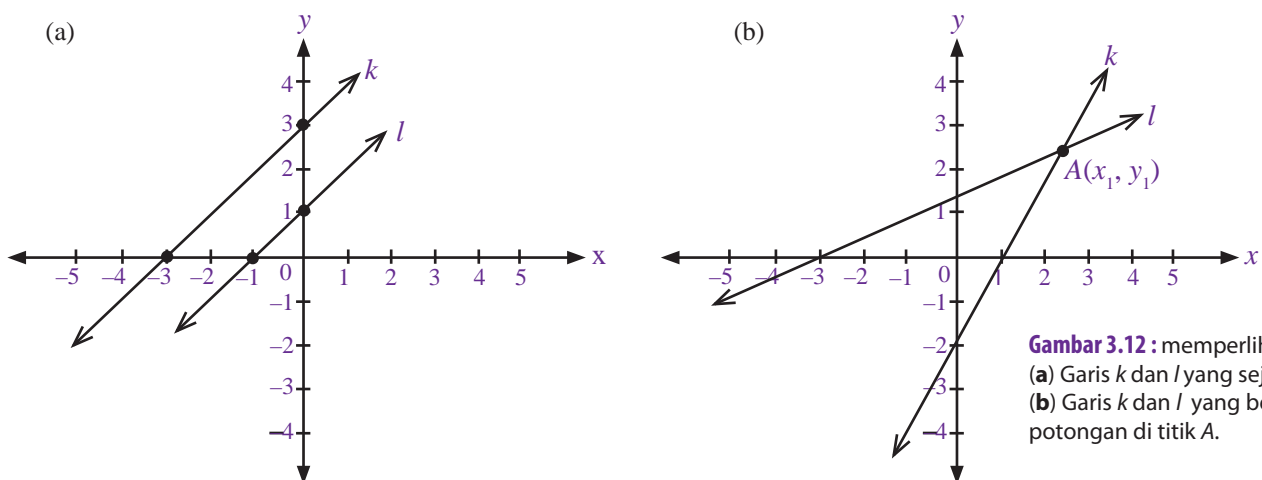
Jadi, persamaan garisnya adalah $8x - 11y + 62 = 0$ ■

Plus +

Cara cepat menyelesaikan bentuk $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ adalah dengan melakukan perkalian silang, yaitu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ¤ $ad = bc$ ■

3. Menentukan Koordinat Titik Potong dari Dua Garis Lurus

Coba kamu perhatikan Gambar 3.12

Gambar 3.12 : memperlihatkan (**a**) Garis *k* dan *l* yang sejajar (**b**) Garis *k* dan *l* yang ber potongan di titik *A*.

Gambar 3.12 : Titik Potong Garis

Dari Gambar 3.12 , terdapat dua garis dalam bidang koordinat, yaitu garis k dan l. Dalam Gambar 3.12(a) , kedua garis tersebut sejajar. Adapun pada Gambar 3.12(b) , kedua garis tersebut tidak sejajar sehingga keduanya berpotongan di suatu titik, yaitu titik A (x_1, y_1). Jadi, koordinat titik potong dapat dicari dari dua garis yang tidak sejajar.

Sekarang, bagaimana cara menentukan koordinat titik potong dari dua persamaan garis yang diketahui? Ada dua cara yang dapat digunakan, yaitu cara menggambar (cara grafik) dan cara **substitusi**. Untuk itu, pelajari uraian berikut.

Problematika

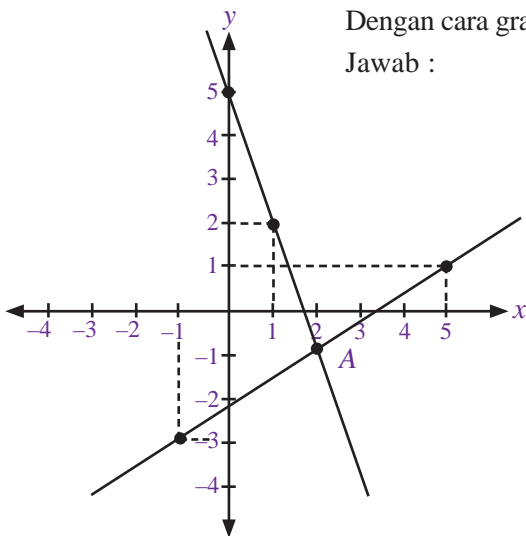
Apakah garis $2x - y + 3 = 0$ dan garis $2y - x + 3 = 0$ berpotongan di satu titik? Jika ya, tentukan titik potongnya

a. Cara Grafik

Dengan cara ini, dua persamaan garis digambar ke dalam bidang koordinat Cartesius sehingga koordinat titik potong kedua garis tersebut dapat dilihat dari gambar. Perhatikan Contoh Soal 3.17.

Contoh Soal 3.17

Dengan cara grafik, tentukan titik potong antara garis $3x + y = 5$ dan garis $2x – 3y = 7$.

Jawab :

- Garis $3x + y = 5$.
  Untuk $x = 1$ maka $y = 2$ sehingga diperoleh titik (1, 2).
  Untuk $x = 0$, maka $y = 5$ sehingga diperoleh titik (0, 5).
- Garis $2x – 3 = 7$.
  Untuk $x = 5$ maka $y = 1$ sehingga diperoleh titik (5, 1).
  Untuk $x = –1$ maka $y = –3$ sehingga diperoleh titik (–1, –3).

Kemudian, gambarlah grafik dari titik-titik yang didapat tersebut.

Dari gambar dapat dilihat bahwa koordinat titik potong dua garis tersebut adalah titik A (2, –1)

b. Cara Substitusi

Dengan cara substitusi, salah satu variabel dari persamaan garis yang diketahui dimasukkan (disubstitusikan) ke dalam variabel yang sama dari persamaan garis yang lain. Untuk lebih jelasnya, perhatikan Contoh Soal 3.18.

Contoh Soal 3.18

Dengan cara substitusi, tentukan koordinat titik potong antara garis $3x + y = 5$ dan garis $2x – 3y = 7$.

Jawab :

Ikuti langkah-langkah berikut.

- Ambil salah satu persamaan garis, misalnya $3x + y = 5$.
- Tentukan salah satu variabel dari garis tersebut, misalnya y.
  $\Rightarrow$ $3x + y = 5$ maka $y = 5 – 3x$.
- Substitusikan nilai y tersebut ke dalam persamaan garis yang lain.

$\Rightarrow$ $2x - 3y = 7$

$2x - 3(5 - 3x) = 7$

$2x - 15 + 9x = 7$

$2x + 9x = 7 + 15$

$11x = 22$

$x = 2$

- Substitusikan nilai x ke dalam salah satu persamaan garis.

  $\Rightarrow$ $3x + y = 5$

  $3(2) + y = 5$

  $6 + y = 5$

  $y = 5 - 6$

  $y = -1$

- Diperoleh $x = 2$ dan $y = -1$. Jadi, koordinat titik potong kedua garis itu adalah $(2, -1)$

4. Aplikasi Persamaan Garis Lurus

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak sekali bidang-bidang yang menggunakan aplikasi persamaan garis lurus. Misalnya, perhitungan kecepatan-jarak-waktu dalam fisika dan perhitungan harga barang dan titik impas dalam ekonomi. Coba kamu pelajari Contoh Soal 3.19.

Tugas 3.2

Carilah 3 permasalahan lain yang menggunakan aplikasi persamaan garis lurus dalam kehidupan sehari-hari. Lalu, buatlah contoh kasus seperti pada **Contoh Soal 3.19**, dan tentukan penyelesaiannya. Laporkan hasil pekerjaanmu kepada gurumu.

Contoh Soal 3.19

1. Sebuah mobil bergerak dengan kecepatan tetap 15 km/jam. Setelah 3 jam, mobil tersebut menempuh jarak 45 km. Berapa lama waktu yang diperlukan mobil tersebut untuk menempuh jarak 90 km?
2. Harga dua buah permen dan tiga buah cokelat adalah Rp800,00. Adapun harga sebuah permen dan lima buah cokelat adalah Rp1.100,00. Tentukan:
   a. harga sebuah permen,
   b. harga sebuah cokelat,
   c. harga 4 buah permen dan 1 buah cokelat.

Jawab :

1. Coba perhatikan gambar berikut. Gambar tersebut merupakan terjemahan dari soal kecepatan-jarak-waktu yang diberikan. Titik koordinat A (15, 1) merupakan kecepatan mobil, yaitu 15 km/jam. Titik koordinat B (45, 3) merupakan jarak dan waktu tempuh mobil yang diketahui, yaitu 45 km dalam waktu 3 jam.

   Dari titik A dan B dapat ditarik garis lurus sehingga diperoleh penyelesaian bahwa untuk menempuh jarak 90 km, mobil tersebut memerlukan waktu 6 jam.

2. Untuk menjawab soal ini, ikuti langkah-langkah berikut.
   - Gunakan pemisahan untuk nama benda.
     Misalkan: permen = x
     cokelat = y
   - Terjemahkan ke dalam model matematika.
     2 permen + 3 cokelat = Rp800,00 berarti $2x + 3y = 800$
     1 permen + 5 cokelat = Rp1100,00 berarti $x + 5y = 1.100$
   - Ambil salah satu persamaan dan ketentuan salah satu variabelnya.
     $x + 5y = 1.100$ maka $x = 1.100 - 5y$.
   - Substitusikan nilai x ke dalam persamaan yang lain

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 800 \\ 2\,(1.100 - 5y) + 3y &= 800 \\ 2.200 - 10y + 3y &= 800 \\ 2.200 - 7y &= 800 \\ -7y &= 800 - 2.200 \\ -7y &= -1.400 \\ y &= 200 \end{aligned}$$

   - Substitusikan nilai y ke dalam salah satu persamaan.

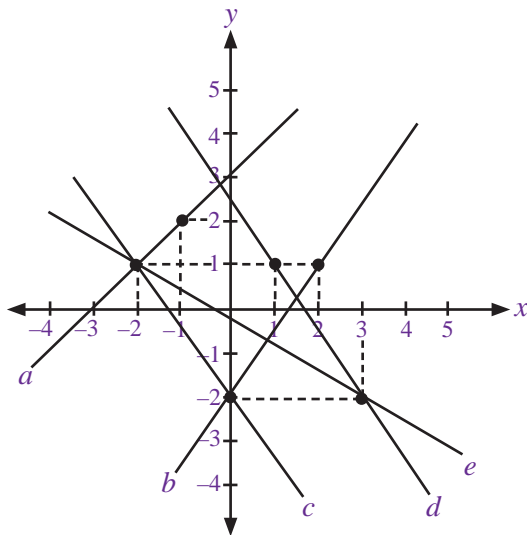
$$\begin{aligned} x + 5y &= 1.100 \\ x + 5\,(200) &= 1.100 \\ x + 1.000 &= 1.100 \\ x &= 1.100 - 1.000 \\ x &= 100 \end{aligned}$$

   Dengan demikian, diperoleh:
   a. harga sebuah permen = x = Rp100,00
   b. harga sebuah cokelat = y = Rp200,00
   c. harga 4 buah permen dan 1 buah cokelat = $4x + y$
      = 4 (Rp100,00) + (Rp200,00)
      = Rp600,00

Uji Kompetensi 3.3

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Tentukan persamaan garis yang melalui titik pusat $P(0, 0)$ dan memiliki gradien sebagai berikut.
   a. $m = -\frac{1}{2}$
   b. $m = -3$
   c. $m = 2$
   d. $m = -\frac{3}{4}$
   e. $m = 1$
2. Tentukan persamaan garis yang melalui titik $P(0, 0)$ dan sejajar dengan garis:
   a. $x + y = 5$
   b. $y = \frac{1}{3}$
   c. $2x - y - 6 = 0$
   d. $x + 5y - 3 = 0$
   e. $3x - 3y - 3 = 0$
3. Tentukan persamaan garis yang melalui titik pusat $P(0, 0)$ dan tegak lurus dengan garis:
   a. $3x + y - 4 = 0$
   b. $y = 2x - 5$
   c. $3y = 2x + 1$
   d. $5x - 6y - 1 = 0$
   e. $2x + 4y + 6 = 0$
4. Sebuah garis yang melalui titik $A(2, 3)$ memiliki gradien yang sejajar dengan garis $4x + 3y - 6 = 0$. Tentukan persamaan garis tersebut.
5. Sebuah garis yang melalui titik $B(-1, -4)$ memiliki gradien yang tegak lurus dengan garis $y = \frac{1}{3}x$.
   Tentukan persamaan garis tersebut.
6. Sebuah garis memiliki gradien $\frac{1}{2}$. Tentukan persamaan garis tersebut jika melalui titik:
   a. $P(1, 1)$
   b. $Q(2, 0)$
   c. $R(0, 5)$
   d. $S(-3, 1)$
   e. $T(2, -5)$

7. Perhatikan gambar bidang koordinat Cartesius berikut ini.

Tentukan:
 a. persamaan garis a,
 b. persamaan garis b,
 c. persamaan garis c,
 d. persamaan garis d,
 e. persamaan garis e.

8. Tentukan titik potong garis $x + y = 5$ dengan :
 a. garis $2x + y = 8$,
 b. garis $x + 3y = 3$,
 c. garis $4x + y = 20$,
 d. garis $2x + 4y = 6$,
 e. garis $5x – y = 13$.
9. Seorang anak bersepeda dengan kecepatan konstan 5 km/jam. Setelah menempuh 20 km selama 4 jam, anak tersebut beristirahat selama 2 jam. Kemudian, melanjutkan perjalanan kembali dengan kecepatan yang sama selama 3 jam.
 a. Gambarkan soal cerita tersebut ke dalam grafik.
 b. Tentukan total waktu yang diperlukan anak tersebut.
 c. Tentukan total jarak yang ditempuh anak tersebut.
10. Harga tiga buku tulis dan empat buku gambar adalah Rp15.600,00. Adapun harga dua buku tulis dan tiga buku gambar adalah Rp11.400,00. Tentukan:
 a. harga buku tulis,
 b. harga buku gambar,
 c. harga 5 buku tulis dan 5 buku gambar.

Rangkuman

1. Persamaan garis lurus adalah persamaan matematika yang jika digambarkan dalam bidang koordinat Cartesius akan membentuk sebuah garis lurus.
2. Dalam koordinat Cartesius, setiap titik dinyatakan dengan pasangan terurut (x, y) di mana koordinat x disebut absis dan koordinat y disebut ordinat.
3. Gradien adalah tingkat kemiringan garis. Gradien dilambangkan dengan m.
4. Berbagai bentuk persamaan garis, antara lain:
 a. $y = mx$
 b. $y = mx + c$
 c. $ax + by + c + 0$
5. Gradien garis yang melalui dua titik dicari dengan rumus:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

6. Gradien garis yang sejajar dengan sumbu-x adalah nol.
7. Garis yang sejajar dengan sumbu-y tidak mempunyai gradien.
8. Garis yang saling sejajar memiliki gradien yang sama.
9. Hasil kali gradien garis yang saling tegak lurus adalah –1.
10. Rumus untuk menentukan persamaan garis dari gradien dan titik koordinat, yaitu:

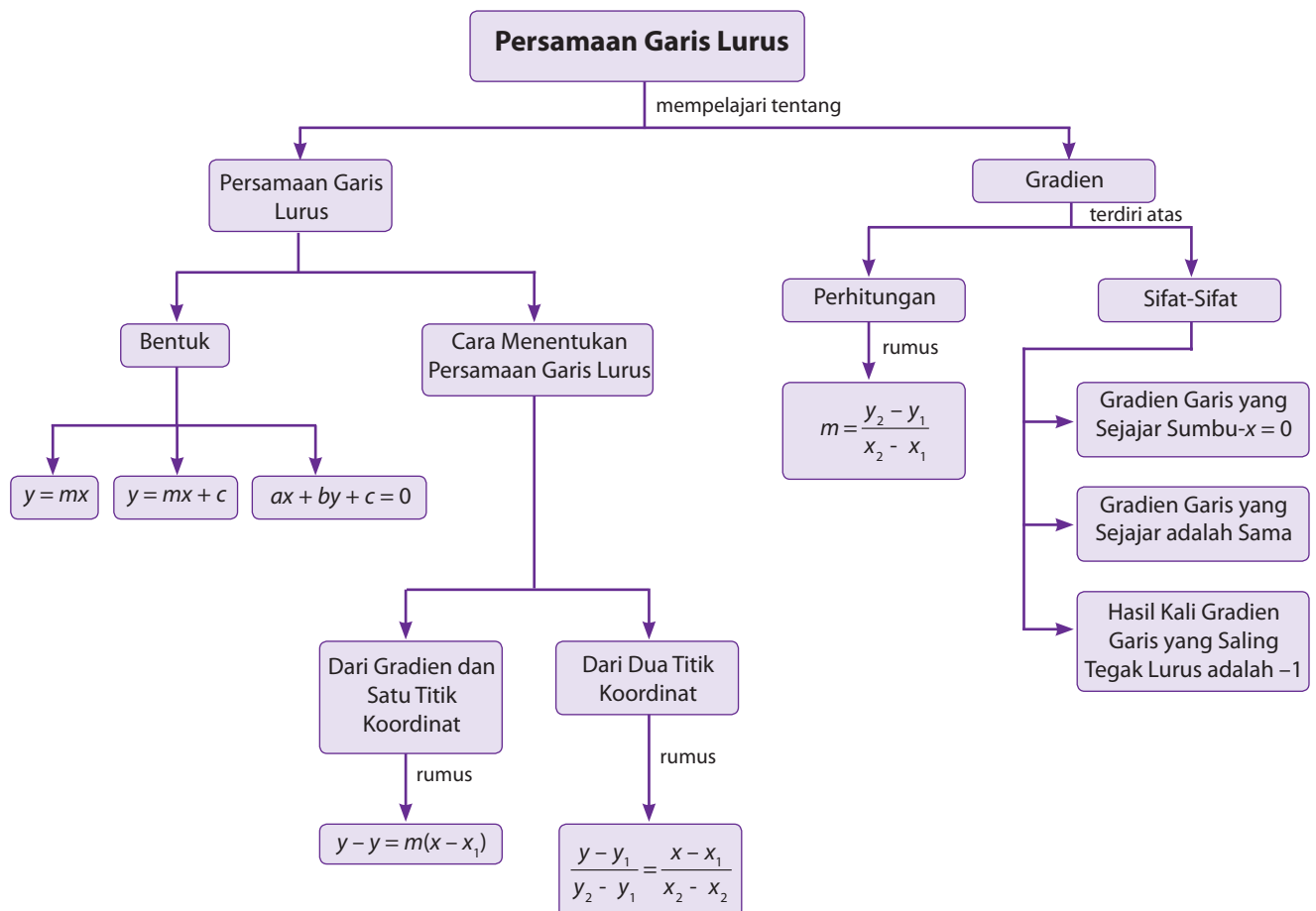
$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

11. Rumus untuk menentukan persamaan garis dari dua titik koordinat, yaitu:

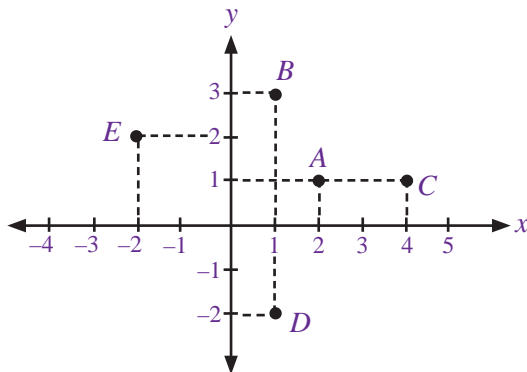
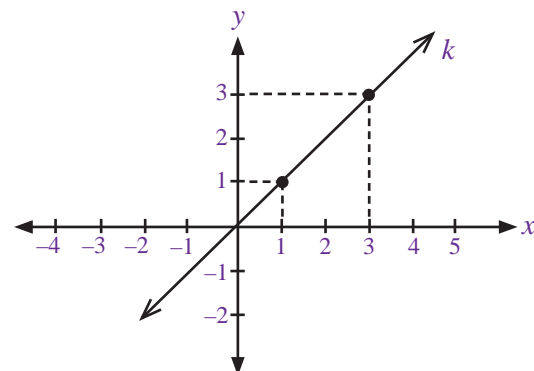
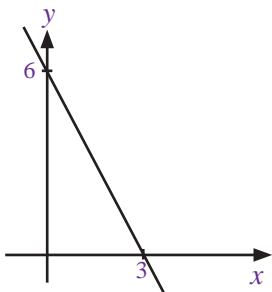
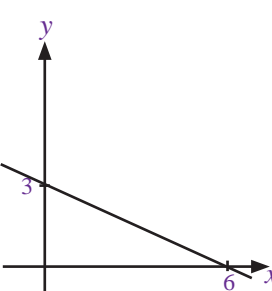
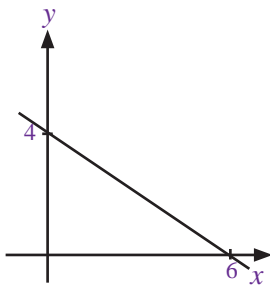
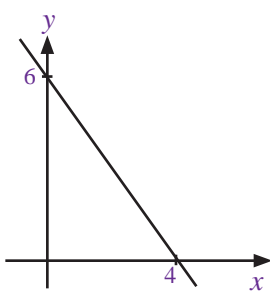
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Refleksi

- Pada bab Persamaan Garis Lurus ini, adakah materi yang menurutmu sulit untuk kamu pahami? Mengapa?
- Pada bab ini, materi-materi apa saja yang belum kamu pahami dan telah kamu pahami dengan baik?
- Kesan apa yang kamu dapat setelah mempelajari bab ini?

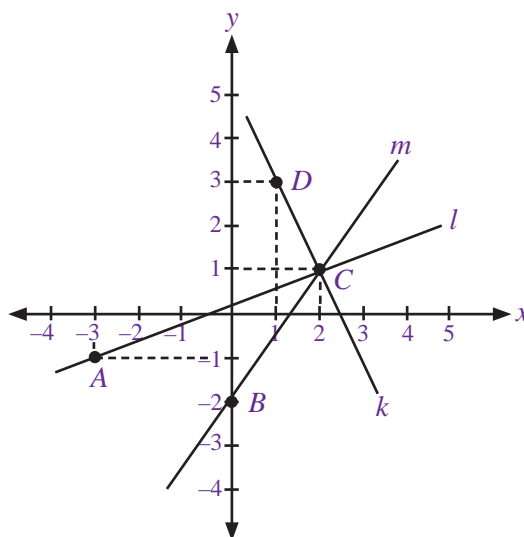
Peta Konsep

Uji Kompetensi Bab 3

A. Pilihlah satu jawaban yang benar.

1. Sebuah titik terletak pada absis –1 dan ordinat 3. Penulisan yang benar untuk koordinat titik tersebut adalah ....
   a. (–1, 3) c. (1, –3)
   b. (3, –1) d. (–3,1)
2. Perhatikan gambar bidang koordinat Cartesius berikut ini.

   Dari gambar tersebut, titik yang memiliki ordinat yang sama adalah titik ....
   a. *E* dan *D* c. *A* dan *C*
   b. *B* dan *D* d. *A* dan *E*
3. Dari gambar pada soal nomor 2, titik yang memiliki absis yang sama adalah titik ....
   a. *E* dan *D* c. *A* dan *C*
   b. *B* dan *D* d. *A* dan *E*
4. Berikut ini adalah titik koordinat yang dilalui oleh garis $y = x + 3$, *kecuali* ....
   a. *A* (3, 6) c. *C* (4, 7)
   b. *B* (–3, 0) d. *D* (0, –3)
5. Gradien dari persamaan garis $y = -\frac{1}{2}x + 6$ adalah ....
   a. $\frac{1}{2}$ c. 6
   b. $-\frac{1}{2}$ d. –6
6. Konstanta dari persamaan garis $y = 2x - 3$ adalah ....
   a. 2 c. 3
   b. –2 d. –3
7. Persamaan garis berikut yang memiliki gradien $-\frac{1}{3}$ adalah ....
   a. $2x + 6y - 7 = 0$
   b. $x - 3y + 4 = 0$
   c. $3x + y - 5 = 0$
   d. $3x - y + 10 = 0$
8. Titik-titik koordinat yang membentuk garis sejajar dengan sumbu *x* adalah ....
   a. *A* (0, 3), *B* (1, 4)
   b. *C* (2, 5), *D* (–2, 5)
   c. *E* (4, –2), *F* (4, 0)
   d. *G* (2, 2), *H* (–3, –3)
9. Gradien garis yang melalui titik (3, 1) dan titik (0, 0) adalah …
   a. $-\frac{1}{3}$ c. –3
   b. $\frac{1}{3}$ d. 3
10. Perhatikan gambar berikut.

   Gradien garis *k* adalah ....
   a. $-\frac{1}{2}$ c. – 2
   b. $\frac{1}{2}$ d. 2
11. Garis *k* adalah garis yang sejajar dengan garis *l*. Jika gradien *l* adalah $-\frac{3}{4}$ maka gradien garis *k* adalah ....
   a. $-\frac{3}{4}$ c. $\frac{3}{4}$
   b. $-\frac{4}{3}$ d. $\frac{4}{3}$
12. Persamaan garis yang melalui titik *A* (–1, 0) dan *B* (3, –8) adalah ....
   a. $y = 2x + 2$ c. $y = -2x + 2$
   b. $y = 2x - 2$ d. $y = -2x - 2$
13. Garis *a* dan garis *b* adalah dua garis yang saling tegak lurus. Jika gradien garis *a* adalah – 3 maka gradien *b* adalah ....
   a. $-\frac{1}{3}$ c. – 3
   b. $\frac{1}{3}$ d. 3

14. Sebuah garis memiliki gradien 3 dan melalui titik (–2, 1). Persamaan garis tersebut adalah ....
   a. $3x + y + 7 = 0$
   b. $3x - y + 7 = 0$
   c. $3x - y - 7 = 0$
   d. $3x + y - 7 = 0$
15. Titik koordinat $A(2, 1)$ dan $B(-2, -7)$ dapat membentuk suatu garis lurus yang memiliki persamaan ....
   a. $y = 3x - 2$ c. $y = 3x + 2$
   b. $y = 2x + 3$ d. $y = 2x - 3$
16. Persamaan garis yang sejajar dengan garis $y = 2x + 1$ dan melalui titik (3, 0) adalah ....
   a. $y = -2x - 6$ c. $y = 2x - 6$
   b. $y = -2x + 6$ d. $y = 2x + 6$
17. Persamaan garis yang tegak lurus dengan garis $y = \frac{1}{3}x - 6$ dan melalui titik (2, –1) adalah ....
   a. $y = 3x + 5$ c. $y = -3x + 5$
   b. $y = 3x - 5$ d. $y = -3x - 5$
18. Garis $y = -\frac{1}{2}x + 3$ akan tegak lurus dengan garis ....
   a. $y = \frac{1}{2}x - 6$
   b. $y = -\frac{1}{2}x + 6$
   c. $y = 2x + 12$
   d. $y = -2x - 5$
19. Gambar yang tepat untuk persamaan garis $2x + y = 6$ adalah ....

a.
c.
b.
d.
20. Koordinat titik potong garis $2x + 3y = 11$ dan garis $x - 2y = 2$ adalah ....
   a. (–1, –4) c. (–4, –1)
   b. (1, 4) d. (4, 1)

B. Kerjakanlah soal-soal berikut

1. Perhatikan gambar bidang koordinat Cartesius berikut ini.

   Dari gambar tersebut, tentukanlah:
   a. titik koordinat A, B, C, dan D,
   b. gradien garis k, l, dan m,
   c. persamaan garis k, l, dan m,
2. Tentukanlah gradien dari persamaan-persamaan garis berikut, kemudian gambarlah pada bidang koordinat Cartesius.
   a. $6x - 3y - 1 = 0$ d. $-x - 2x + 1 = 0$
   b. $3x + y - 2 = 0$ e. $x + y - 2 = 0$
   c. $x + 2y + 4 = 0$
3. Buatlah persamaan garis dari data berikut ini.
   a. Titik $A(2, -5)$ dan gradien $m = -1$.
   b. Titik $B(1, 4)$ dan titik $C(3, 2)$.
   c. Titik $D(-3, -4)$ dan titik pusat koordinat.
   d. Gradien $m = -2$ dan titik pusat koordinat.
   e. gradien $m = \frac{1}{3}$ dan titik $E(4, 0)$.
4. Tentukanlah koordinat titik potong dari persamaan garis berikut.
   a. $2x - 3y = 4$ dan $x + y = 5$
   b. $x - 5y = 2$ dan $3x - 2y = 4$
   c. $4x - y = 12$ dan $7x + 3y = 5$
   d. $2x - 3y = 9$ dan $3x + 2y = 6$
   e. $3x + y = 4$ dan $4x + 2y = 8$
5. Harga 1 kg beras dan 4 kg terigu adalah Rp18.000,00. Sedangkan harga 2 kg beras dan 2 kg terigu adalah Rp15.000,00. Hitunglah:
   a. harga 1 kg beras,
   b. harga 1 kg terigu,
   c. harga 4 kg beras dan 5 kg terigu.

Sumber: *Science Encylopedia*, 1997

Bab

4

Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

- A. Pengertian SPLDV
- B. Penyelesaian SPLDV
- C. Penerapan SPLDV

Harga 3 buku tulis dan 4 pensil adalah Rp13.200,00, sedangkan harga 5 buku tulis dan 2 pensil adalah Rp15.000,00. Dapatkah kamu menghitung harga satuan untuk buku tulis dan pensil tersebut?

Permasalahan-permasalahan aritmetika sosial seperti ini dapat diselesaikan dengan mudah menggunakan Sistem Persamaan Linier Dua Variabel (SPLDV). Mengapa harus dua variabel? Perhatikan bahwa contoh kasus tersebut melibatkan dua macam variabel yang belum diketahui nilainya, yaitu harga satuan buku tulis dan harga satuan pensil. Untuk dapat mengetahui harga-harganya, kamu dapat menggunakan pemisalan untuk harga satuan buku tulis dan harga satuan pensil. Misalkan, harga satuan buku tulis adalah x dan harga satuan pensil adalah y. Jadi, contoh kasus tersebut dapat ditulis dalam bentuk model matematika sebagai berikut.

$$3x + 4y = 13.200$$
$$5x + 2y = 15.000$$

Dengan menggunakan metode penyelesaian SPLDV, kamu dapat mengetahui nilai x dan y. Berikut ini akan diuraikan konsep dasar SPLDV serta metode-metode penyelesaian yang dapat digunakan.

Uji Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari materi pada bab ini, kerjakan soal-soal berikut.

1. Sederhanakan bentuk-bentuk berikut.
   a. $2x - 3y + 4x - 10y = 0$
   b. $(5x + 4y)^2$
   c. $(x + 1)(x - 1) + (x - 1)^2$
2. Tentukan nilai a pada persamaan-persamaan berikut.
   a. $2a + 5 = 20$
   b. $4(a - 3) = 10$
   c. $a^2 - 16 = 0$
3. Gambarlah titik-titik berikut pada bidang Cartesius.
   a. (2, 4)
   b. (–2, 5)
   c. (–3, –6)

A. Pengertian SPLDV

Untuk memahami pengertian dan konsep dasar SPLDV, ada baiknya mengulang kembali materi tentang persamaan linear satu variabel. Pelajarilah uraian berikut secara saksama.

1. Persamaan Linear Satu Variabel

Di Kelas VII, kamu telah mempelajari materi tentang persamaan linear satu variabel. Masih ingatkah kamu apa yang dimaksud dengan persamaan linear satu variabel? Coba kamu perhatikan bentuk-bentuk persamaan berikut.

$x + 5 = 6$	$6 + 7p = 20$
$4x + 3 = 9$	$2r = 3 + 9$
$12 + y = 14$	$8p + 6 = 24$

Bentuk-bentuk persamaan tersebut memiliki satu variabel yang belum diketahui nilainya. Bentuk persamaan seperti inilah yang dimaksud dengan linear satu variabel. Untuk lebih jelasnya, coba kamu perhatikan dan pelajari Contoh Soal 4.1 secara seksama.

Contoh Soal 4.1

Dari bentuk-bentuk persamaan berikut, apakah persamaan tersebut termasuk persamaan linear satu variabel atau bukan.

1. $5y - t\,3 = 12$
2. $23 + x = 30$
3. $4p + 6 = 18$
4. $18 - 3x = 12$
5. $20 + 5x = 35$

Jawab:

1. Persamaan $5y - 3 = 12$ merupakan persamaan linear satu variabel dengan varibel y.
2. Pesamaan $23 + x = 30$ merupakan persamaan linear satu variabel dengan varibel x.
3. Persamaan $4p + 6 = 18$ merupakan persamaan linear satu variabel linear satu variabel dengan variabel p.
4. Persamaan $18 - 3x = 12$ merupakan persamaan linear satu variabel dengan variabel x.
5. Persamaan $20 + 5x$ merupakan persamaan linear satu variabel dengan variabel x.

Seperti yang telah dipelajari sebelumnya, untuk penyelesaian dari persamaan linear satu variabel dapat digunakan beberapa cara. Salah satu di antaranya dengan sifat kesamaan. Perhatikan uraian persamaan berikut.

$4p + 5 = 17$

Menentukan nilai p pada persamaan linear satu variabel sebagai berikut.

$4p + 5 = 17$ (tulis kembali soal yang dimaksud)

$4p + 5 - 5 = 17 - 5$ (kedua ruas dikurangi 5)

$4p = 12$

$\frac{4p}{4} = \frac{12}{4}$ (kedua ruas dibagi 4)

$p = 3$

Jadi, diperoleh nilai $p = 3$ dan himpunan penyelesaian, Hp = {3}

$3x + 2 = 2x + 6$

Menentukan nilai x pada persamaan linear satu variabel gunakan cara berikut.

$3x + 2 = 2x + 6$ (tulis kembali soal yang dimaksud)

$3x + 2 - 2 = 2x + 6 - 2$ (kedua ruas dikurangi 2)

$3x = 2x + 4$

$3x - 2x = 2x + 4 - 2x$ (kedua ruas dikurangi $2x$)

$x = 4$

Jadi, diperoleh nilai $x = 4$ dan himpunan penyelesaian, Hp = {4}.

Untuk lebih jelasnya, coba kamu perhatikan dan pelajari Contoh Soal 4.2 berikut.

Contoh Soal 4.2

Tentukan penyelesaian dari persamaan-persamaan linear satu variabel berikut.

1. $4y - 3 = 5$
2. $2p + 5 = 17$
3. $12 - 3r = 3$
4. $6x + 2 = 11 + 3x$
5. $4 - 3b = 2b - 16$

Jawab:

1. $4y - 3 = 5$

   $4y - 3 + 3 = 5 + 3$

   $4y = 8$

   $\frac{4p}{4} = \frac{8}{4}$

   $y = 2$

   Diperoleh nilai $y = 2$ dan himpunan penyelesaiannya, Hp = {2}
2. $2p + 5 = 17$

   $2p + 5 - 5 = 17 - 5$

   $2p = 12$

   $\frac{2y}{2} = \frac{12}{2}$

   $p = 6$

   Diperoleh nilai $p = 6$ dan himpunan penyelesaiannya, Hp = {6}

3. $12 - 3r = 3$

$$\begin{aligned} 12 - 3r - 12 &= 3 - 12 \\ -3r &= -9 \\ 3r &= 9 \\ \frac{3r}{3} &= \frac{9}{3} \\ r &= 3 \end{aligned}$$

Diperoleh nilai $r = 3$ dan himpunan penyelesaiannya, Hp = {3}

4. $6x + 2 = 11 + 3x$

$$\begin{aligned} 6x + 2 - 3x &= 11 + 3x - 3x \\ 3x + 2 &= 11 \\ 3x + 2 - 2 &= 11 - 2 \\ 3x &= 9 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{9}{3} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Diperoleh nilai $x = 3$ dan himpunan penyelesaiannya, Hp = {3}

5. $4 - 3b = 2b - 16$

$$\begin{aligned} 4 - 3b - 2b &= 2b - 16 - 2b \\ 4 - 5b &= -16 \\ 4 - 5b - 4 &= -16 - 4 \\ -5b &= -20 \\ 5b &= 20 \\ \frac{5b}{5} &= \frac{20}{5} \\ b &= 4 \end{aligned}$$

Diperoleh nilai $b = 4$ dan himpunan penyelesaiannya, Hp = {4}

2. Persamaan Linear Dua Variabel

Kamu telah mempelajari dan memahami persamaan linear satu variabel. Materi tersebut akan membantu kamu untuk memahami persamaan linear dua variabel. Coba kamu perhatikan bentuk-bentuk persamaan berikut.

$2x + 3y = 14$	$12m - n = 30$
$p + q + 3 = 10$	$r + 65 = 10$
$4a + 5b = b + 7$	$9z - 3v = 5$

Persamaan-persamaan tersebut memiliki dua variabel yang belum diketahui nilainya. Bentuk inilah yang dimaksud dengan persamaan linear dua variabel. Jadi, persamaan dua variabel adalah persamaan yang hanya memiliki dua variabel dan masing-masing variabel berpangkat satu. Untuk lebih jelasnya, coba kamu perhatikan dan pelajari Contoh Soal 4.3 berikut.

Contoh Soal 4.3

Sebutkan masing-masing variabel dari persamaan linear dua variabel berikut ini.
1. $3x - y = 5$
2. $4x + 6y = 6$
3. $p - q = 1$
4. $7m - 2n = 4$
5. $3p + 3q = 9$

Jawab:
1. $3x - y = 5$ merupakan persamaan linear dua variabel yaitu variabel x dan y.
2. $4x + 6y = 6$ merupakan persamaan linear dua variabel yaitu variabel x dan y.
3. $p - q = 1$ merupakan persamaan linear dua variabel yaitu variabel p dan q .
4. $7m - 2n = 4$ merupakan persamaan linear dua variabel yaitu variabel m dan n.
5. $3p + 3q = 9$ merupakan persamaan linear dua variabel yaitu variabel p dan q.

Sekarang, bagaimana menentukan penyelesaian dan himpunan penyelesaian linear dua variabel? Penyelesaian persamaan linear dua variabel dapat ditentukan dengan cara mengganti kedua variabelnya dengan bilangan yang memenuhi persamaan linear tersebut. Hasilnya berupa koordinat yang memuat nilai x dan y.

Contoh Soal 4.4

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari persamaan linear dua variabel berikut. Kemudian gambarkan grafiknya.
1. $3x + y = 12$; $x, y \in$ bilangan asli
2. $x + 2y = 6$; $x, y \in$ bilangan cacah
3. $5x - y = 10$; $\in \{0, 1, 2, 3\}$, $y \in$ {bilangan asli}

Jawab
1. Diketahui persamaan $3x + y = 12$; $x, y \in$ bilangan asli.
   - Tetapkan nilai $x = 1$ sehingga:
     $3x + y = 12$
     $3 \cdot 1 + y = 12$
     $3 + y = 12$
     $y = 9$
     Diperoleh $x = 1$ dan $y = 9$ atau dapat dituliskan $(x,y) = (1, 9)$.
   - Ambil nilai $x = 2$ sehingga:
     $3x + y = 12$
     $3 \cdot 2 + y = 12$
     $6 + y = 12$
     $y = 6$
     Diperoleh $x = 2$ dan $y = 6$ atau dapat dituliskan $(x,y) = (2, 6)$.
   - Tetapkan nilai x = 3, sehingga:
     $3x + y = 12$
     $3 \cdot 3 + y = 12$
     $9 + y = 12$
     $y = 3$
     Diperoleh $x = 3$ dan $y = 3$ atau dapat dituliskan $(x,y) = (3, 3)$.

- Tetapkan nilai $x = 4$ maka:

  $3x + y = 12$

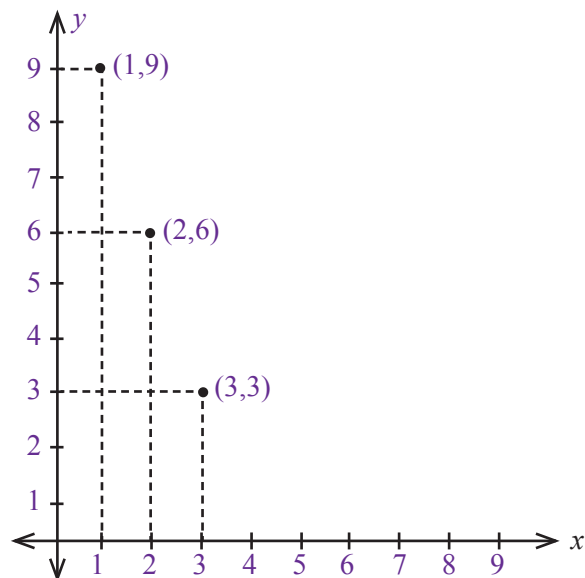
  $3 \cdot 4 + y = 12$

  $12 + y = 12$

  $y = 0$

Diperoleh $x = 4$ dan $y = 0$, nilai ini tidak memenuhi karena nilai y bukan anggota bilangan asli.

Jadi, himpunan penyelesaian dari $3x + y = 12$ dengan x dan y anggota bilangan asli adalah: {(1,9), (2,6), (3,3)} atau Hp = {(1,9), (2,6), (3,3)}

Jika digambarkan dalam bidang koordinat Cartesius maka diperoleh gambar berikut:

2. Diketahui persamaan $x + 2y = 6$ di mana $x, y \in$ bilangan cacah.

- Tetapkan nilai $x = 0$ sehingga:

  $x + 2y = 6$

  $0 + 2y = 6$

  $2y = 6$

  $y = 3$

Diperoleh $x = 0$ dan $y = 3$ atau dapat dituliskan $(x,y) = (0, 3)$.

- Ambil nilai x =1 sehingga:

  $x + 2y = 6$

  $1 + 2y = 6$

  $2y = 5$

  $y = \frac{5}{2}$

Nilai $y = \frac{5}{2}$ tidak memenuhi syarat karena bukan anggota bilangan cacah.

- Jika nilai $x = 2$ maka:

  $x + 2y = 6$

  $2 + 2y = 6$

  $2y = 4$

  $y = 2$

Diperoleh $x = 2$ dan $y = 2$ atau dapat dituliskan $(x,y) = (2, 2)$.

- Jika nilai $x = 3$ maka:

  $x + 2y = 6$

  $3 + 2y = 6$

  $2y = 3$

  $y = \frac{3}{2}$

Nilai $y = \frac{3}{2}$ tidak memenuhi syarat karena bukan anggota bilangan cacah.

- Jika nilai $x = 4$ maka:

$$x + 2y = 6$$
$$4 + 2y = 6$$
$$2y = 2$$
$$y = 1$$

Diperoleh $x = 4$ dan $y = 1$ atau dapat dituliskan $(x,y) = (4, 1)$.

- Jika nilai $x = 5$ maka:

$$x + 2y = 6$$
$$5 + 2y = 6$$
$$2y = 1$$
$$y = \frac{1}{2}$$

Nilai $y = \frac{1}{2}$ tidak memenuhi syarat karena bukan anggota bilangan cacah.

- Jika ditetapkan nilai $x = 6$ maka:

$$x + 2y = 6$$
$$6 + 2y = 6$$
$$2y = 0$$
$$y = 0$$

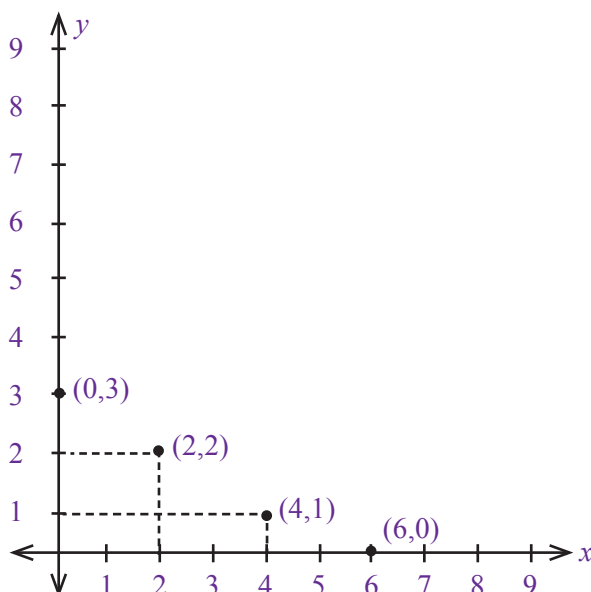
Diperoleh $x = 6$ dan $y = 0$ atau dapat dituliskan $(x,y) = (6, 0)$.

- Jika nilai $x = 7$, maka:

$$x + 2y = 6$$
$$7 + 2y = 6$$
$$2y = -1$$
$$y = -\frac{1}{2}$$

Nilai $y = -\frac{1}{2}$ tidak memenuhi syarat karena bukan anggota bilangan cacah.

Jadi, himpunan penyelesaian dari $x + 2y = 6$ dengan x dan y anggota bilangan cacah adalah {(0,3), (2,2), (4,1), (6,0)}.

Jika digambarkan dalam bidang koordinat Cartesius maka diperoleh gambar berikut.

3. Diketahui persamaan $5x - y = 10$ di mana $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ dan $y \in$ {bilangan asli}.

- Jika dipilih nilai $x = 0$ dari yang diketahui maka:

$$
\begin{aligned}
5x - y &= 10 \\
5 \cdot 0 - y &= 10 \\
0 - y &= 10 \\
y &= -10
\end{aligned}
$$

Nilai $y = -10$ tidak memenuhi syarat karena bukan anggota bilangan asli.

- Jika ditetapkan nilai $x = 1$ dari yang diketahui maka:

$$
\begin{aligned}
5x - y &= 10 \\
5 \cdot 1 - y &= 10 \\
5 - y &= 10 \\
y &= -5
\end{aligned}
$$

Nilai $y = -5$ tidak memenuhi syarat karena bukan anggota bilangan asli.

- Jika diambil nilai $x = 2$ dari yang diketahu maka:

$$
\begin{aligned}
5x - y &= 10 \\
5 \cdot 2 - y &= 10 \\
10 - y &= 10 \\
y &= 0
\end{aligned}
$$

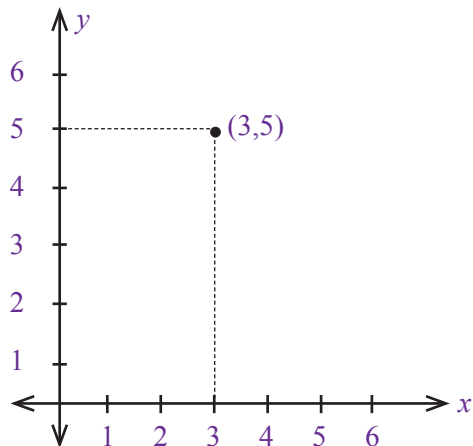
Nilai $y = 0$ tidak memenuhi syarat karena bukan anggota bilangan asli.

- Sehungga untuk nilai x yang terakhir, yaitu = 3 maka:

$$
\begin{aligned}
5x - y &= 10 \\
5 \cdot 3 - y &= 10 \\
15 - y &= 10 \\
y &= 5
\end{aligned}
$$

Diperoleh $x = 3$ dan $y = 5$ atau dapat dituliskan $(x,y) = (3, 5)$.

Jadi, himpunan penyelesaian dari $5x - y = 10$ dengan $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ dan $y \in$ bilangan real adalah $\{(3, 5)\}$.

Jika digambarkan dalam bidang koordinat Cartesius maka diperoleh gambar berikut.

3. Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Coba kamu perhatikan bentuk-bentuk persamaan linear dua variabel berikut.

$2x + 3y = 8$ $x + y = 2$	$4a + b = 8$ $a - b = 1$
$p + 2q = 9$ $5p + q = 4$	$9c + f = 12$ $c - 3f = 2$
$3m - 2n = 1$ $m + 3n = 5$	$k + l = 6$ $2k + 2l = 12$

Dari uraian tersebut terlihat bahwa masing-masing memiliki dua buah persamaan linear dua variabel. Bentuk inilah yang dimaksud dengan Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV). Berbeda dengan persamaan dua variabel, SPLDV memiliki penyelesaian atau himpunan penyelesaian yang harus memenuhi kedua persamaan linear dua variabel tersebut. Contoh, perhatikan sistem SPLDV berikut.

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ x + y &= 5 \end{aligned}\right\} x, y \in \text{bilangan cacah}$$

Penyelesaian dari sistem persamaan linear adalah mencari nilai-nilai x dan y yang dicari demikian sehingga memenuhi kedua persamaan linear. Perhatikan Tabel 4.1 berikut ini.

Tabel 4.1 SPLDV

$2x + y = 6$	$x + y = 5$
$x = 0, y = 6$	$x = 0, y = 5$
$x = 1, y = 4$	$x = 1, y = 4$
$x = 2, y = 2$	$x = 2, y = 3$
$x = 3, y = 0$	$x = 3, y = 2$
....	$x = 4, y = 1$
....	$x = 5, y = 0$

Tabel 4.1 menjelaskan bahwa persamaan linear 2x + y = 6 memiliki 4 buah penyelesaian. Adapun persamaan linear x + y = 5 memiliki 6 buah penyelesaian. Manakah yang merupakan penyelesaian dari 2 x + y = 6 dan x + y = 5? Penyelesaian adalah nilai x dan y yang memenuhi kedua persamaan linear tersebut. Perhatikan dari Tabel 4.1 nilai x = 1 dan y = 4 sama-sama memenuhi penyelesaian dari kedua persamaan linear tersebut. Jadi, dapat dituliskan:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ x + y &= 5 \end{aligned}\right\} \text{Hp} = \{(1,4)\}$$

Agar kamu lebih memahaminya, perhatikan dan pelajari Contoh Soal 4.5 berikut ini.

Contoh Soal 4.5

Tentukan penyelesaian dari masing-masing persamaan dan penyelesaian dari SPLDV berikut ini.

1. $\left.\begin{aligned} 4x + y &= 8 \\ 2x + y &= 4 \end{aligned}\right\} x, y \in \text{bilangan cacah}$
2. $\left.\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 5 \end{aligned}\right\} x, y \in \text{bilangan cacah}$
3. $\left.\begin{aligned} 3x + y &= 6 \\ 2x + 2y &= 4 \end{aligned}\right\} x, y \in \text{bilangan asli}$

Jawab:

1. Dari tabel berikut tampak bahwa persamaan $4x + y = 8$ memiliki 3 penyelesaian dan persamaan $2x + y = 4$ memiliki 3 penyelesaian, tapi, hanya ada satu penyelesaian yang memenuhi SPLDV tersebut, yaitu $x = 2$ dan $y = 0$. Dapat juga dituliskan Hp = {(2, 0)}.

$4x + y = 8$	$2x + y = 4$
$x = 0, y = 8$	$x = 0, y = 4$
$x = 1, y = 4$	$x = 1, y = 1$
$x = 2, y = 0$	$x = 2, y = 0$

2. Perhatikan tabel berikut

$x + y = 3$	$x + 2y = 5$
$x = 0, y = 3$	$x = 1, y = 2$
$x = 1, y = 2$	$x = 3, y = 1$
$x = 2, y = 1$	$x = 5, y = 0$
$x = 3, y = 0$	–

Dari tabel tersebut tampak bahwa persamaan $x + y = 3$ memiliki 4 penyelesaian. Adapun persamaan $x + 2y = 5$ memiliki 3 penyelesaian. Satu-satunya penyelesaian SPLDV tersebut adalah $x = 1$ dan $y = 2$. Jadi, Hp = $\{(1, 2)\}$.

3. Perhatikan tabel berikut.

$3x + y = 6$	$2x + 2y = 4$
$x = 1, y = 3$	$x = 1, y = 1$
$x = 2, y = 0$	$x = 2, y = 0$

Dari tabel tersebut tampak bahwa persamaan $3x + y = 6$ memiliki 2 penyelesaian dan persamaan $2x + 2y = 4$ memiliki 2 penyelesaian. Akan tetapi, penyelesaian yang memenuhi SPLDV adalah $x = 2$ dan $y = 0$. Jadi, Hp = $\{(2, 0)\}$

Uji Kompetensi 4.1

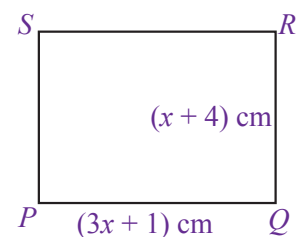
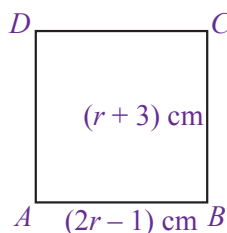
Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Dengan menggunakan sifat-sifat kesamaan, tentukanlah penyelesaian persamaan berikut.
   a. $4a - 10 = 14$
   b. $12x + 4 = 28$
   c. $15 - 3x = 6$
   d. $8y - 6 = 5y + 9$
   e. $15 - z = 4z - 5$
2. Umur Budi x tahun, sedangkan umur Iwan 3 kali umur Budi. Jika jumlah umur mereka adalah 44 tahun, tentukan:
   a. model matematika dari soal tersebut,
   b. umur mereka masing-masing.
3. Perhatikan persegi $ABCD$ pada gambar di samping, tentukan:

   a. nilai r,
   b. keliling persegi $ABCD$,
   c. luas persegi $ABCD$,

4. Diketahui sebuah persegipanjang dengan ukuran seperti gambar berikut.
   Jika keliling persegi panjang ABCD adalah 44 cm, tentukanlah:

   a. nilai x,
   b. panjang PQ,
   c. panjang QR,
   d. luas persegi panjang $ABCD$.

5. Tentukanlah penyelesaian dari persamaan berikut.
   a. $2(a + 3) = 12$
   b. $5(2r - 3) = 5$
   c. $3(p + 6) = 2(p - 3)$
   d. $6(2 - x) = 12$
   e. $4(5 - 2x) = 12$

6. Sebutkan variabel, koefesien, dan konstanta dari persamaan linear dua variabel berikut ini.
   a. $2a + b = 5$
   b. $x + y - 2 = 0$
   c. $4p - 3q + 1 = 0$
   d. $3m - n = 4m + 2n - 3$
   e. $5x + y = x - 3y + 4$
7. Tentukanlah tiga titik koordinat yang dilalui oleh garis dengan persamaan berikut.
   a. $4x + 3y = 0$
   b. $x - 3y + 5 = 0$
   c. $2x + 3y - 8 = 0$
   d. $x + 4y = 12$
   e. $8x - 2y + 2 = 0$
8. Gambarkan dengan grafik himpunan penyelesaian dari persamaan linear dua variabel berikut.
   a. $x + y = 4$, dengan $x, y \in$ bilangan asli
   b. $5x - y = 2$, dengan $x \in \{1, 2, 3\}$, $y \in$ bilangan asli.
   c. $2x + 3y = 6$, dengan $x \in$ bilangan cacah.
9. Buatlah model matematika persamaan linear dari kalimat-kalimat berikut.
   a. Umur adik ditambah 2 kali umur kakak adalah 20 tahun.
   b. Harga 2 buku ditambah 3 pensil adalah Rp 10.000,00.
   c. Keliling persegipanjang dengan ukuran panjang tiga kali ukuran lebar adalah 20 cm.
10. Tentukan penyelesaian masing-masing persamaan linear dalam SPLDV berikut. Tentukanlah pula penyelesaian SPLDV-nya
   a. $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ x + 3y = 6 \end{array}\right\} x, y \in$ bilangan cacah
   b. $\left.\begin{array}{l} 5x - y = 3 \\ x + y = 2 \end{array}\right\} x \in \{1, 2, 3,\}, y \in$ bilangan cacah
   c. $\left.\begin{array}{l} 4x + 2y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{array}\right\} x, y \in$ bilangan asli

B. Penyelesaian SPLDV

Seperti yang telah dipelajari sebelumnya, SPLDV adalah persamaan yang memiliki dua buah persamaan linear dua variabel. Penyelesaian SPLDV dapat ditentukan dengan cara mencari nilai variabel yang memenuhi kedua persamaan linear dua variabel tersebut.

Pada subbab sebelumnya, kamu telah mempelajari bagaimana cara menentukan penyelesaian suatu SPLDV dengan menggunakan tabel, namun cara seperti itu membutuhkan waktu yang cukup lama. Untuk itu, ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian SPLDV. Metode-metode tersebut adalah:

1. **Metode Grafik**
2. **Metode Substitusi**
3. **Metode Eliminasi**

Pelajarilah uraian mengenai metode-metode tersebut pada bagian berikut ini.

1. Metode Grafik

Grafik untuk persamaan linear dua variabel berbentuk garis lurus. Bagaimana dengan SPLDV? Ingat, SPLDV terdiri atas dua buah persamaan dua variabel, berarti SPLDV digambarkan berupa dua buah garis lurus. Penyelesaian dapat ditentukan dengan menentukan titik potong kedua garis lurus tersebut. Untuk lebih jelasnya, coba perhatikan dan pelajari Contoh Soal 4.6 dan Contoh Soal 4.7

Contoh Soal 4.6

Gunakan metode grafik, tentukanlah penyelesaian SPLDV berikut.

a. $x + y = 2$

b. $3x + y = 6$

Jawab:

Langkah pertama, menentukan titik potong terhadap sumbu x dan sumbu y pada masing-masing persamaan linear dua variabel.

a. Persamaan $x + y = 2$

Titik potong dengan sumbu x, berarti $y = 0$.

$x + y = 2$
$x + 0 = 2$
$x = 2$

Diperoleh $x + y = 2$ dan $y = 0$, maka diperoleh titik potong dengan sumbu x dititik (2, 0). Titik potong dengan sumbu y, berarti $x = 0$.

$x + y = 2$
$0 + y = 2$
$y = 2$

Diperoleh $x = 0$ dan $y = 2$, maka diperoleh titik potong dengan sumbu y (0, 2).

b. Persamaan $3x + y = 6$

Titik potong dengan sumbu x, berarti $y = 0$.

$3x + y = 6$
$3x + 0 = 6$
$3x = 6$
$x = 2$

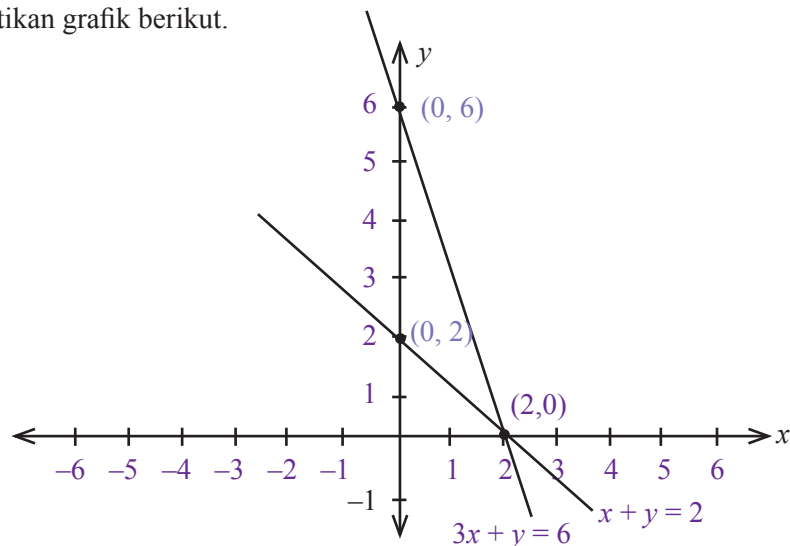
Diperoleh $x = 2$ dan $y = 0$ maka diperoleh titik potong dengan sumbu x dititik (2, 0). Titik potong dengan sumbu y, berarti $x = 0$.

$3x + y = 6$
$3 \cdot 0 + y = 6$
$y = 6$

Diperoleh $x = 0$ dan $y = 6$ maka diperoleh titik potong dengan sumbu y dititik (0, 6).Langkah kedua, gambarkan ke dalam bidang koordinat Cartesius.

Persamaan $x + y = 2$ memiliki titik potong sumbu di (2, 0) dan (0, 2)

Persamaan $3x + y = 6$ memiliki titik potong sumbu di (2, 0) dan (0, 6)

Perhatikan grafik berikut.

Langkah ketiga, tentukan himpunan penyelesaian SPLDV berikut.

Perhatikan gambar tersebut, titik potong antara garis $x + y = 2$ dan $3x + y = 6$ adalah (2, 0) Jadi, Hp = {(2, 0)}

Contoh Soal 4.7

Gunakan metode grafik untuk mencari penyelesaian SPLDV berikut.

a. $x - y = 1$

b. $3x - y = 6$

Jawab:

Langkah pertama, menentukan titik potong terhadap sumbu x dan sumbu y

a. Persamaan $x - y = 1$.

Titik potong dengan sumbu x, berarti $y = 0$

$x - y = 1$
$x - 0 = 1$
$x = 1$

Diperoleh $x = 1$ dan $y = 0$ maka diperoleh titik potong dengan sumbu x: dititik (1, 0). Titik potong dengan sumbu y, berarti $x = 0$

$x - y = 1$
$0 - y = 1$
$y = -1$

Diperoleh $x = 0$ dan $y = -1$ maka diperoleh titik potong dengan sumbu y dititik (0, –1)

b. Persamaan $3x - y = 6$.

Titik potong dengan sumbu x, berarti $y = 0$

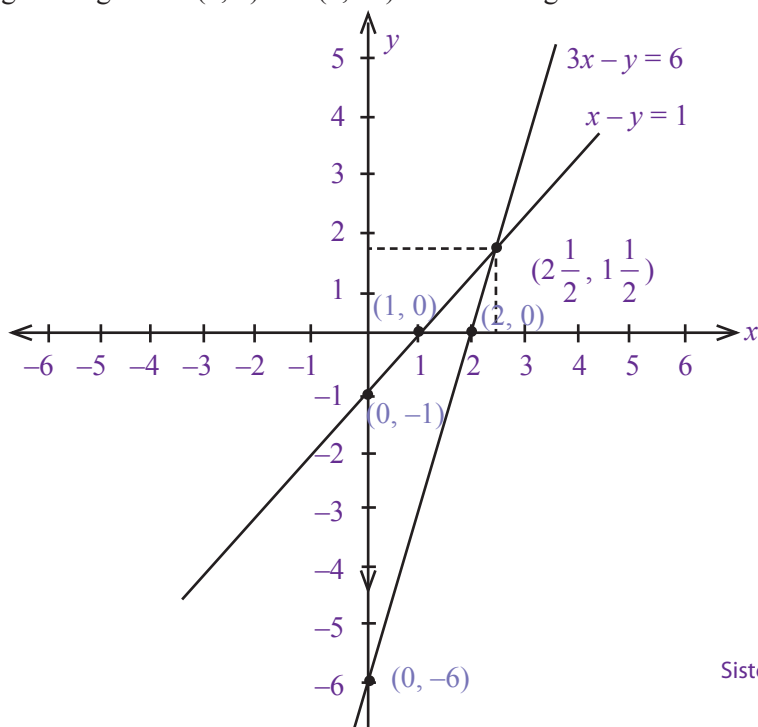
$3x - y = 6$
$3x - 0 = 6$
$3x = 6$
$x = 1$

Diperoleh $x = 2$ dan $y = 0$, maka diperoleh titik potong dengan sumbu x dititik : (2, 0). Titik potong dengan sumbu y, berarti $x = 0$

$3x - y = 6$
$3 \cdot 0 - y = 6$
$0 - y = 6$
$y = -6$

Diperoleh $x = 0$ dan $y = -6$ maka diperoleh titik potong dengan sumbu y dititik (0, –6). Langkah kedua, gambarkan ke dalam bidang koordinat Cartesius.

a. Persamaan $x - y = 1$ memiliki titik potong dengan sumbu x dan y masing-masing dititik (1, 0) dan (0, –1)

b. Persamaan $3x - y = 6$ memiliki titik potong dengan sumbu x dan y masing-masing dititik (2, 0) dan (0, –6). Perhatikan grafik berikut.

Langkah ketiga, tentukan himpunan penyelesaian SPLDV tersebut.
Perhatikan gambar tersebut, titik potong antara garis $3x - y = 6$ dan $x - y = 1$ adalah $\left(2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$. Jadi, Hp = $\left\{\left(2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)\right\}$

2. Metode Substitusi

Penyelesaian SPLDV menggunakan metode substitusi dilakukan dengan cara menyatakan salah satu variabel dalam bentuk variabel yang lain kemudian nilai variabel tersebut menggantikan variabel yang sama dalam persamaan yang lain. Adapun langkah-langkah yang dapat dilakukan untuk menentukan penyelesaian SPLDV dengan menggunakan metode substitusi dapat kamu pelajari dalam Contoh Soal 4.8 dan Contoh Soal 4.9

Contoh Soal 4.8

Gunakan metode substitusi, tentukan penyelesaian SPLDV berikut.
$3x + y = 7$
$x + 4y = 6$

Jawab:
Langkah pertama, tuliskan masing-masing persamaan dalam bentuk persamaan (1) dan (2).
$3x + y = 7$ ...(1)
$x + 4y = 6$ ...(2)
Langkah kedua, pilih salah satu persamaan, misalkan persamaan (1). Kemudian, nyatakan salah satu variabelnya dalam bentuk variabel lainnya.
$3x + y = 7$
$y = 7 - 3x$ ... (3)
Langkah ketiga, nilai variabel y pada persamaan (3) menggantikan variabel y pada persamaan (2).

$$\begin{aligned} x + 4y &= 6 \\ x + 4(7 - 3x) &= 6 \\ x + 28 - 12x &= 6 \\ x - 12x &= 6 - 28 \\ -11x &= -22 \\ x &= 2 \text{ ...(4)} \end{aligned}$$

Langkah keempat, nilai x pada persamaan (4) menggantikan variabel x pada salah satu persamaan awal, misalkan persamaan (1).

$$\begin{aligned} 3x + y &= 7 \\ 3(2) + y &= 7 \\ 6 + y &= 7 \\ y &= 7 - 6 \\ y &= 1 \text{ ...(5)} \end{aligned}$$

Langkah kelima, menentukan penyelesaian SPLDV tersebut.
Dari uraian diperoleh nilai $x = 2$ dan $y = 1$. Jadi, dapat dituliskan Hp = {(2, 1)}

Contoh Soal 4.9

Gunakan metode substitusi untuk menentukan penyelesaian SPLDV berikut.
$x + 5y = 13$
$2x - y = 4$

Jawab:
Langkah pertama, tuliskan masing-masing persamaan dalam bentuk persamaan (1) dan (2).
$x + 5y = 13$ … (1)
$2x - y = 4$ … (2)
Langkah kedua, pilih salah satu persamaan, misalkan persamaan (2). Kemudian, nyatakan salah satu variabelnya dalam bentuk variabel yang lain.
$x + 5y = 13$
$x = 13 - 5y$ … (3)
Langkah ketiga, nilai variabel x pada persamaan (3) menggantikan variabel x pada persamaan (2).

$$\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ 2(13 - 5y) - y &= 4 \\ 26 - 10y - y &= 4 \\ -10 - y &= 4 - 26 \\ -11y &= -22 \\ y &= 2 \text{ … (4)} \end{aligned}$$

Langkah keempat, nilai y pada persamaan (4) menggantikan variabel y pada salah satu persamaan awal, misalkan persamaan (2).
$2x - y = 4$
$2x - 2 = 4$
$2x = 4 + 2$
$2x = 6$
$x = 3$ … (5)
Langkah kelima, menentukan penyelesaian SPLDV tersebut.
Dari persamaan (4) dan (5) diperoleh nilai $x = 3$ dan $y = 2$. Jadi, diperoleh Hp = {(3, 2)}

3. Metode Eliminasi

Berbeda dengan metode substitusi yang mengganti variabel, metode eliminasi justru menghilangkan salah satu variabel untuk dapat menentukan nilai variabel yang lain. Dengan demikian, koefisien salah satu variabel yang akan dihilangkan haruslah sama atau dibuat sama.

Untuk lebih jelasnya, coba kamu perhatikan dan pelajari Contoh Soal 4.10 dan Contoh Soal 4.11

Contoh Soal 4.10

Gunakan metode eliminasi untuk menentukan penyelesaian SPLDV berikut.
$x + y = 7$
$2x + y = 9$

Jawab:
Langkah pertama, menghilangkan salah satu variabel dari SPLDV tersebut.
Misalkan, variabel y yang akan dihilangkan maka kedua persamaan harus dikurangkan.

$$\begin{aligned} x + y &= 7 \\ 2x + y &= 2 \\ \hline -x &= -1 \\ x &= 2 \end{aligned} \quad -$$

Diperoleh nilai x = 2.

Langkah kedua, menghilangkan variabel yang lain dari SPLDV tersebut, yaitu variabel *x*. Perhatikan koefisien *x* pada SPLDV tersebut tidak sama. Jadi, harus disamakan terlebih dahulu.

$$\begin{array}{l|ll|l} x + y = 7 & \times & 2 & 2x + 2y = 14 \\ 2x + y = 9 & \times & 1 & 2x + y = 9 \end{array}$$

Kemudian, kedua persamaan yang telah disetarakan dikurangkan.

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 14 \\ 2x + y &= 9 \\ \hline y &= 5 \end{aligned} \quad -$$

Diperoleh nilai $y = 5$

Langkah ketiga, menentukan penyelesaian SPLDV tersebut.

Diperoleh nilai $x = 2$ dan $y = 5$. Jadi, Hp = {(2, 5)}.

Solusi Matematika

Diketahui sistem persamaan $3x + 3y = 3$ dan $2x - 4y = 14$. Nilai $4x - 3y$ adalah ....

a. –16
b. –12
c. 16
d. 18

Jawab:

Tentukan dahulu nilai *x* dan *y*.

$$\begin{array}{l|ll|} 3x + 3y = 3 & ¥ & 1 \\ 2x - 4y = 14 & ¥ & 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 6x + 6y &= 6 \\ 6x - 12y &= 42 \\ \hline 18y &= 36 \\ y &= -2 \end{aligned} \quad -$$

$$\begin{array}{l|ll|} 3x + 3y = 3 & ¥ & 4 \\ 2x - 4y = 14 & ¥ & 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 12x + 12y &= 12 \\ 6x - 12y &= 42 \\ \hline 18x &= 54 \\ y &= 3 \end{aligned} \quad -$$

Substitusikan nilai $x = 3$ dan $y = -2$ pada $4x - 3y$, diperoleh

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 4(3) - 3(-2) \\ &= 12 + 6 \\ &= 18 \end{aligned}$$

Jawaban: d

UN SMP, 2007

Contoh Soal 4.11

Gunakan metode eleminasi untuk menentukan penyelesaian SPLDV berikut.

$2x + 3y = 1$
$x - y = -2$

Jawab:

Langkah pertama, menghilangkan salah satu variabel dari SPLDV tersebut.

Misalkan, variabel *x* akan dihilangkan, namun, koefisien *x* harus disetarakan dulu.

$$\begin{array}{l|ll|l} 2x + 3y = 1 & \times & 1 & \rightarrow 2x + 3y = 1 \\ x - y = -2 & \times & 2 & \rightarrow 2x - 2y = -4 \end{array}$$

Setelah koefisien *x* setara, kemudian dikurangkan

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 2x - 2y &= 4 \\ \hline 5y &= 5 \\ y &= 1 \end{aligned} \quad -$$

Langkah kedua, menghilangkan variabel yang lain dari SPLDV tersebut, yaitu variabel *y*. Namun, variabel *y* harus disetarakan terlebih dahulu.

$$\begin{array}{l|ll|l} 2x + 3y = 1 & \times & 1 & \rightarrow 2x + 3y = 1 \\ x - y = -2 & \times & 3 & \rightarrow 3x - 3y = -6 \end{array}$$

Setelah koefisien *y* setara, kemudian dijumlahkan.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 3x - 3y &= -6 \\ \hline 5x &= -5 \\ x &= -1 \end{aligned} \quad +$$

Langkah ketiga, menentukan penyelesaian SPLDV tersebut. Diperoleh nilai $x = -1$ dan $y = 1$. Jadi, Hp = {(–1, 1)}.

Uji Kompetensi 4.2

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Gunakan metode grafik, tentukan penyelesaian dari SPLDV berikut.
   a. $x + 2y = -2$
      $3x - y = 10$
   b. $x + 3y = 7$
      $x + y = 3$
   c. $x - y = 1$
      $x - 2y = 3$
2. Gunakan metode subtitusi, tentukan penyelesaian dari SPLDV berikut.
   a. $x + y = 5$
      $x - y = -1$
   b. $x + 4y = 0$
      $2x + y = 7$
   c. $x + y = -3$
      $2x - 2y = 10$
3. Gunakan metode eleminasi, tentukan penyelesaian dari SPLDV berikut
   a. $x - y = -1$
      $3x + 2y = -13$
   b. $x - 3y = 8$
      $3x - y = -8$
   c. $2x + y = 9$
      $x + 2y = 3$
4. Diketahui SPLDV berikut.
   $3x - 2y = 6$
   $4x + 2y = 22$
   Tentukan himpunan penyelesaiannya menggunakan metode subtitusi.
5. Diketahui SPLDV berikut.
   $x + y = 1$
   $2x + y = -2$
   Tentukan penyelesaiannya menggunakan metode grafik.

C. Penerapan SPLDV

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak sekali permasalahan-permasalahan yang dapat dipecahkan menggunakan SPLDV. Pada umumnya, permasalahan tersebut berkaitan dengan masalah aritmetika sosial. Misalnya, menentukan harga satuan barang, menentukan panjang atau lebar sebidang tanah, dan lain sebagainya. Agar kamu lebih memahami, perhatikan dan pelajari contoh-contoh soal berikut.

Harga 1 kg beras dan 4 kg minyak goreng Rp14.000,00. Sedangkan harga 2 kg beras dan 1 kg minyak goreng Rp10.500,00. Tentukan:

a. model matematika dari soal tersebut,
b. harga sebuah beras dan minyak goreng,
c. harga 2 kg beras dan 6 minyak goreng.

Jawab:

a. Misalkan: harga 1 kg beras = x
   harga 1 kg minyak goreng = y
   maka dapat dituliskan:
   $1x + 4y = 14.000$
   $2x + 1y = 10.500$
   Diperoleh model matematika:
   $x + 4y = 14.000$
   $2x + y = 10.500$
b. Untuk mencari harga satuan beras minyak goreng, tentukan penyelesaian SPLDV tersebut.
   Dengan menggunakan metode subtitusi, diperoleh:
   $x + 4y = 14.000$ … (1)
   $2x + y = 10.500$ … (2)
   - menentukan variabel x dari persamaan (1)
     $x + 4y = 14.000$
     $x = 14.000 - 4y$ … (3)

- Subtitusikan nilai x pada persamaan (3) ke persamaan (2).

$2x + y = 10.500$
$2\,(14.000 - 4y) + y = 10.500$
$28.000 - 8y + y = 10.500$
$-8y + y = 10.500 - 28.000$
$-7y = -17.500$
$y = 2.500 \ldots (4)$

- Subtitusikan nilai y pada persamaan (4) ke persamaan (2).

$2x + y = 10.500$
$2x + (2.500) = 10.500$
$2x = 10.500 - 2.500$
$2x = 8.000$
$x = 4.000$

- menentukan nilai x dan y.

Dari uraian tersebut diperoleh:
x = harga 1 kg beras = Rp4.000,00
y = harga 1 kg minyak goreng = Rp2.500,00

Solusi Matematika

Harga 8 buah buku tulis dan 6 buah pensil Rp14.400.00. Harga 6 buah buku tulis dan 5 buah pensil Rp11.200,00. Jumlah harga 5 buah buku tulis dan 8 buah adalah ....

a. Rp13.600,00
b. Rp12.800,00
c. Rp12.400,00
d. Rp11.800,00

Jawab:
Misalkan harga buku ditulis x dan harga pensil y

$8x + 6y = 14.400 \mid 5$
$6x + 5y = 11.200 \mid 6$

$40x + 30y = 72.000$
$36x + 30y = 67.200$
$4x + 0 = 4.800$
$x = \frac{4.800}{4}$
$x = 1.200$

$6x + 5y = 11.20$
$6 \cdot 1.200 + 5y = 11.200$
$7.200 + 5y = 11.200$
$5y = 11.200 - 7.200$
$y = \frac{4000}{5} = 800$

Jadi, $5x + 8y = 5 \cdot 1.200 + 8.800$
$y = 6000 + 6400$
$= 12.400$

Jawaban: c

Soal UAN SMP, 2003

Contoh Soal 4.13

Umur Sani 7 tahun lebih tua dari umur Ari. Sedangkan jumlah umur mereka adalah 43 tahun. Tentukanlah:

a. model matematika dari soal tersebut,
b. umur masing-masing.

Jawab:

a. Misalkan: umur Sani = x tahun
umur Ari = y tahun

maka dapat dituliskan:
$x = 7 + y$
$x - y = 7$
$x + y = 43$
Diperoleh model matematika:
$x - y = 7$
$x + y = 43$

b. Untuk menghitung umur masing-masing, tentukan SPLDV tersebut. Dengan menggunakan metode eleminasi, diperoleh:

- menghitung variabel x

$$\begin{array}{r} x - y = 7 \\ x + y = 43 \\ \hline -2y = -36 \end{array} \; -$$
$y = 18$

- menghilangkan variabel y

$$\begin{array}{r} x - y = 7 \\ x + y = 43 \\ \hline 2x = 50 \end{array} \; +$$
$x = 25$

- menentukan nilai x dan y

Dari uraian tersebut, diperoleh: x = umur Sani = 25 tahun
y = umur Ari = 18 tahun

Contoh Soal 4.14

Harga sebuah buku tulis dan sebuah buku gambar Rp8.000,00. Sedangkan harga dua buku tulis dan sebuah buku gambar Rp11.000,00. Tentukanlah:

a. model matematika dari soal tersebut,
b. harga satuan dari buku tulis dan buku gambar,
c. harga dari 5 buku tulis dan 4 buku gambar.

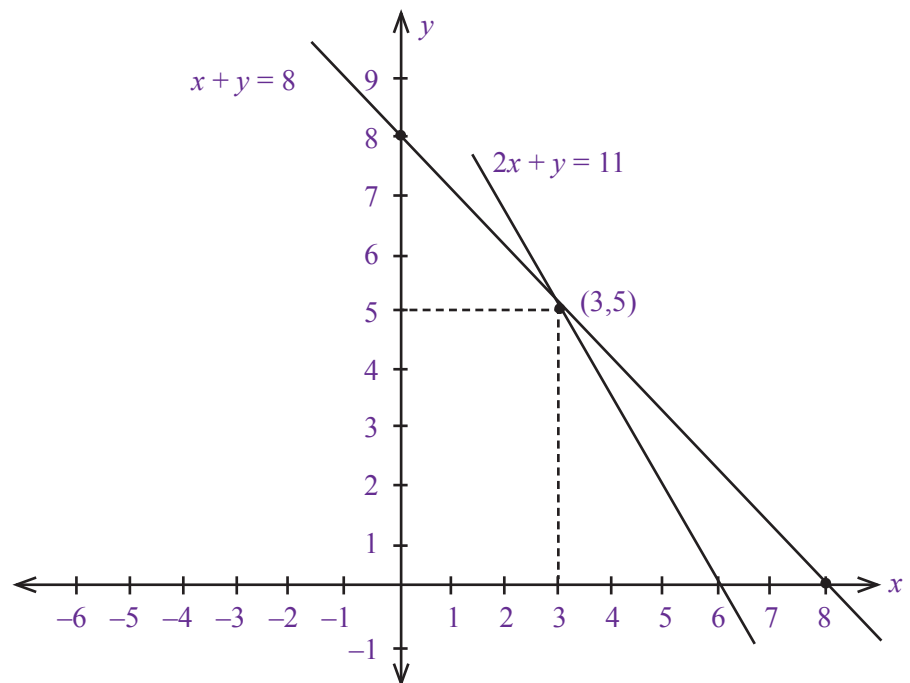
Jawab:

a. Misalkan: harga buku tulis = x
harga buku gambar = y
Dapat dituliskan:
$x + y = 8.000$
$2x + y = 11.000$
Diperoleh model matematika:
$x + y = 8.000$
$2x + y = 11.000$

b. Untuk menentukan harga satuan, tentukan penyelesaian dari SPLDV tersebut. Misalkan, dengan menggunakan metode grafik diperoleh:

- Ubah SPLDV dalam suatu bentuk sederhana $\left.\begin{array}{r} x + y = 8 \\ 2x + y = 11 \end{array}\right\}$ dalam ribuan rupiah.
- menentukan titik potong dengan sumbu x dan sumbu y untuk masing-masing persamaan.
  $x + y = 8$
  Titik potong dengan sumbu x, berarti $y = 0$.
  $x + y = 8$
  $x + (0) = 8$
  $x = 8$
  Diperoleh titik potong dengan sumbu x di titik (8, 0).
  Titik potong dengan sumbu y, berarti $x = 0$
  $x + y = 8$
  $0 + y = 8$
  $y = 8$
  Diperoleh titik potong dengan sumbu y di titik (0, 8).
  $2x + y = 11$
  Titik potong dengan sumbu x, berarti $y = 0$.
  $2x + y = 11$
  $2x + 0 = 11$
  $2x = 11$
  $x = 5,5$
  Diperoleh titik potong dengan sumbu x di titik (5, 5, 0).
  titik potong dengan sumbu y, berarti $x = 0$.
  $2x + y = 11$
  $2 \cdot 0 + y = 11$
  $0 + y = 11$
  $y = 11$
  Diperoleh titik potong dengan sumbu y dititik (0, 11)
- Gambarlah dalam bidang koordinat Cartesius
  Persamaan $x + y = 8$ memiliki titik potong dengan sumbu x dan y masing-masing di titik (8, 0) dan (0, 8). Persamaan $2x + y = 11$ memiliki titik potong dengan sumbu x dan y masing-masing di titik (5,5, 0) dan (0, 11).

Problematika

Di sebuah taman, rumput yang berbentuk lingkaran berjari-jari 20 meter terdapat kolam berbentuk persegipanjang. Panjang kolam 16 m dan lebarnya 12 meter. Harga rumput per m^2 Rp3.250,00 dan biaya penanamannya Rp750.000,00. Berapa biaya yang dikeluarkan seluruhnya?

- Menentukan penyelesaian SPLDV.
  Dari gambar terlihat bahwa titik potong kedua garis tersebut adalah (3, 5). Ini menunjukkan bahwa nilai x (dalam ribuan rupiah) adalah 3, sedangkan nilai y (dalam ribuan rupiah) adalah 5.
  Jadi, harga satuan buku tulis adalah Rp5.000,00 dan harga sebuah buku gambar adalah Rp5.000,00.

c. Harga dari 5 buku tulis dan 4 buku gambar adalah:

$$\begin{aligned} 5x + 4y &= 5 \cdot 3.000 + 4 \cdot 5.000 \\ &= 15.000 + 20.000 \\ &= 35.000 \end{aligned}$$

Jadi, harga dari 5 buku tulis dan 4 buku gambar adalah Rp35.000,00

Uji Kompetensi 4.3

Kerjakanlah soal-soal berikut.

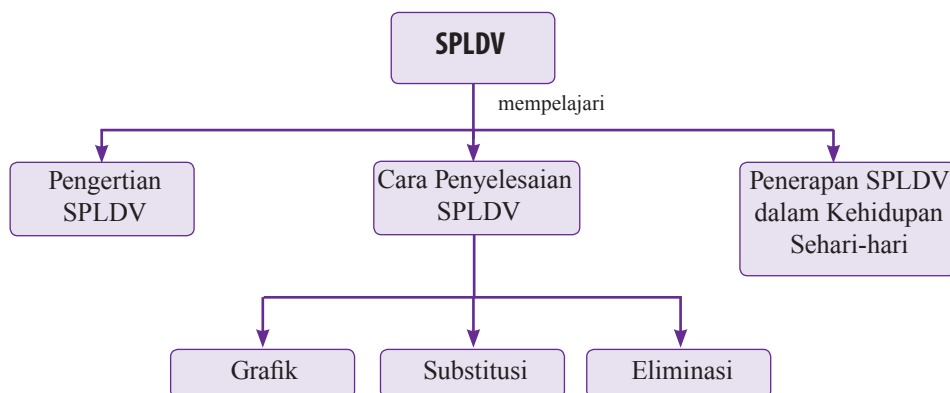
1. Harga satu kaos dan satu celana adalah Rp130.000,00. Sedangkan harga dua potong kaos dan satu potong celana adalah Rp130.000,00. Tentukanlah:
   a. model matematika dari soal tersebut,
   b. harga satuan kaos dan celana,
   c. harga 4 potong kaos dan 2 celana.
2. Sebidang tanah memiliki ukuran panjang 8 meter lebih panjang dari pada lebarnya. Jika keliling sebidang tanah tersebut adalah 44 m^2, tentukanlah:
   a. model matematika dari soal tersebut,
   b. ukuran panjang dan lebar sebidang tanah tersebut,
   c. luas sebidang tanah tersebut,
   d. Jika tanah tersebut dijual dengan Rp100.000,00 per meter persegi, berapakah harga jual sebidang tanah tersebut ?
3. Harga 3 pensil dan 2 buku tulis adalah Rp5.100,00. Sedangkan harga 2 pensil dan 4 buku tulis adalah Rp7.400,00. Tentukanlah:
   a. model matematika soal cerita tersebut,
   b. harga satuan pensil dan buku tulis,
   c. harga 10 buah pensil dan 2 buah buku tulis.
4. Adik berusia 13 tahun lebih muda dari kakak. Sembilan tahun kemudian, umur kakak dua kali lipat dari usia adik. Tentukanlah:
   a. model matematika dari soal tersebut,
   b. umur adik dan umur kakak,
   c. jumlah umur adik dan umur kakak.
5. Selisih uang Budi dan Ali adalah Rp3.000,00. Jika 2 kali uang Budi ditambah dengan 3 kali uang Ali adalah Rp66.000,00. Tentukanlah:
   a. model matematika dari soal tersebut,
   b. besarnya uang masing-masing,
   c. jumlah uang Budi dan Ali

Rangkuman

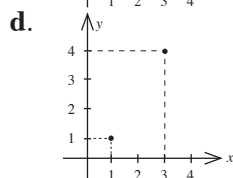
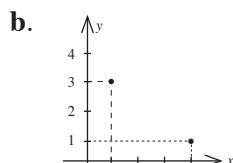
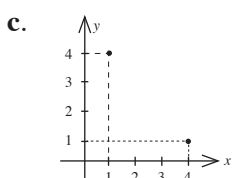
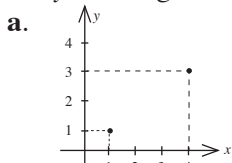
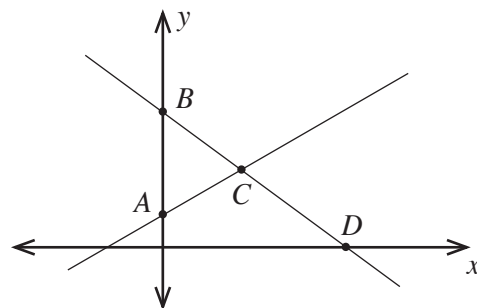
1. Persamaan Linear Satu Variabel adalah suatu persamaan matematik yang memiliki satu jenis variabel.
   Misal, $x + 5 = 6$, variabelnya x
   $8p + 6 = 24$, variabelnya p
2. Persamaan Linear Satu Variabel adalah suatu persamaan matematik yang memiliki dua jenis variabel.
   Misal, $3x – y = 5$, variabelnya x dan y.
   $12m – n = 30$, variabelnya m dan n.
3. Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV) adalah sistem yang memiliki dua persamaan matematik dengan dua jenis variabel dan memiliki himpunan penyelesaian yang memenuhi kedua persamaan linear dua variabel tersebut.
4. Metode grafik adalah salah satu cara menyelesaikan SPLDV berupa dua garis lurus dan dapat ditemukan titik potong dari dua garis lurus tersebut.
5. Metode Substitusi adalah salah satu cara menyelesaikan SPLDV dengan menyatakan salah satu variabel dalam bentuk variabel lain, kemudian nilai variabel tersebut menggantikan variabel yang sama dalam persamaan yang lain.
6. Metode Eliminasi adalah salah satu cara menyelesaikanSPLDV dengan menghilangkan salah satu variabel untuk dapat menentukan nilai variabel yang lain

Refleksi

- Pada bab Faktorisasi Aljabar ini, adakah materi yang menurutmu sulit untuk kamu pahami?
- Pada bab ini, bagian mana yang paling menarik untuk dipelajari? Mengapa?
- Kesan apakah yang kamu dapatkan setelah mempelajari materi bab ini?

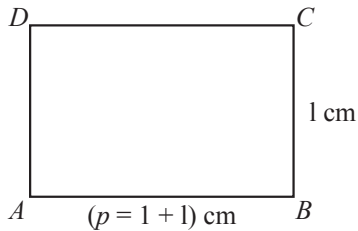
Peta Konsep

Uji Kompetensi Bab 4

A. Pilihlah salah satu jawaban yang paling tepat.

1. Perhatikan persamaan linear berikut.
   $5p - 3 = 0$
   Variabel dari persamaan tersebut adalah ....
   a. 5 c. p
   b. $5p$ d. -3
2. Koefisien x persamaan linear $x + 2 = 5$ adalah ....
   a. 0 c. 2
   b. 1 d. 3
3. Nilai x yang memenuhi persamaan linear:
   $12x - 3 = 8x + 13$ adalah ....
   a. 1 c. 3
   b. 2 d. 4
4. Variabel dari persamaan linear dua variabel
   $4x - 3y + 5 = 0$ adalah ....
   a. x c. x dan y
   b. y d. 5
5. Himpunan penyelesaian $3x - y = 1$ dengan $x \in \{0, 1, 2,3\}$ dan $y \in$ bilangan asli adalah ....
   a. $\{(0, -1), (1, 2), (2, 3), (3, 8)\}$
   b. $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
   c. $\{(1, 2), (2, 5), (3, 8)\}$
   d. $\{(0, -1), (1, 2), (2, 5), (3, 4)\}$
6. Persamaan berikut yang merupakan persamaan linear dua variabel adalah ....
   a. $7a + b = 5$ c. $4p = 8$
   b. $2 - 3y = 1$ d. $x^2 + 2y = 5$
7. Diketahui persamaan linear dua variabel:
   $5p - 2q = 19$
   Jika nilai q adalah 6 maka nilai p adalah ....
   a. 4 c. 6
   b. 5 d. 7
8. Jika p dan q merupakan anggota bilangan cacah, maka himpunan penyelesaian dari: $2p + q = 4$ adalah ....
   a. $\{(0, 4), (1, 2), (2, 0)\}$
   b. $\{(0, 4), (1, 2), (2, 0), (3, -2)\}$
   c. $\{(0, 4), (2, 0)\}$
   d. $\{(0, 4)\}$
9. Jika digambarkan dalam bidang Cartesius, himpunan penyelesaian dari $5x - 3y = 2$ dengan $x \in \{1, 2, 3\}$ dan $y \in$ bilangan asli adalah ....
   a.
   b.
   c.
   d.
10. Nilai p yang memenuhi persamaan:
    $4p + 3q = 11$
    $2p - q = 3$
    adalah ....
    a. 0 c. 2
    b. 1 d. 3
11. Nilai y yang memenuhi persamaan:
    $x + y = 7$
    $5x - y = 5$
    adalah ....
    a. 2 c. 4
    b. 3 d. 5
12. Himpunan penyelesaian dari SPLDV
    $4x - 2y = 16$
    $x - 3y = 9$
    adalah ....
    a. $\{(3, 2)\}$ c. $\{(3, -2)\}$
    b. $\{(2, 3)\}$ d. $\{(-3, 2)\}$
13. Perhatikan gambar berikut

    Dari grafik tersebut yang merupakan penyelesaian SPLDV ditunjukkan oleh titik ....
    a. A c. C
    b. B d. D
14. Koordinat titik potong sumbu x dan sumbu y dari persamaan $3x + 2y - 12 = 0$ adalah ....
    a. (4, 0) dan (6, 0)
    b. (6, 0) dan (0, 4)
    c. (0, 6) dan (4, 0)
    d. (0, 4) dan (0, 6)
15. Pasangan berurutan (x, y) yang merupakan penyelesaian SPLDV
    $5x + 2y = 15$
    $3x + 4y = 23$
    adalah ....
    a. (1, 5) c. $(-1, -5)$
    b. (5, 1) d. $(-5, -1)$
16. Diketahui SPLDV sebagai berikut.
    $3x + 2y = 2$
    $x - 4y = 10$
    Dari SPLDV tersebut, nilai $x + y$ adalah ....

a. 0 c. 2
b. 1 d. 3

17. Diketahui SPLDV sebagai berikut.
$3p + q = 7$
$4p + 2q = 12$
Nilai $5p - q$ adalah ....
a. 0 c. 2
b. 1 d. 3

18. Perhatikan gambar berikut

Jika keliling persegipanjang $ABCD$ 30 cm maka luas persegipanjang $ABCD$ adalah ....
a. 48 cm^2 c. 56 cm^2
b. 64 cm^2 d. 72 cm^2

19. Selisih umur seorang ayah dengan anaknya 40 tahun. Jika umur ayah tiga kali lipat dari umur anaknya maka umur anak tersebut adalah ….
a. 10 tahun c. 20 tahun
b. 15 tahun d. 25 tahun

20. Harga 5 buah kue A dan 2 buah kue B Rp4.000,00. Sedangkan harga 2 buah kue A dan harga 3 buah kue B Rp2.700,00. Jadi, harga sebuah kue A dan dua buah kue B adalah ….
a. Rp1.200,00 c. Rp1.800,00
b. Rp1.600,00 d. Rp2,400,00

B. Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan linear variabel berikut.
   a. $x + y = 1$ dengan x, y, ∈bilangan cacah.
   b. $2x + y = 4$ dengan x, y, ∈bilangan cacah.
   c. $x + 5y = 3$ dengan x, y, ∈bilangan cacah.
   d. $3x - y = 1$ dengan x ∈{0, 1, 2} y ∈bilangan asli.
   e. $4x - 3y = 2$ dengan x ∈{1, 2, 3} y ∈bilangan asli.
2. Tentuan himpunan penyelesaian dari SPLDV berikut.
   a. $x + y = 6$
      $2x + y = 8$
   b. $4x - 2y = 2$
      $x + y = 5$
   c. $x + 3y = 5$
      $2x + y = 5$
   d. $5x + 3y = 8$
      $4x - y = 3$
   e. $3x + 4y = 14$
      $x + 5y = 12$
3. Keliling sebuah persegi panjang 76 cm. Jika selisih antara panjang dan lebar persegipanjang tersebut 10 cm, tentukanlah:
   a. model matematika dari cerita tersebut,
   b. panjang dan lebar persegi panjang tersebut,
   c. luas persegi panjang tersebut.
4. Jumlah uang Aqil dan uang Ari Rp22.000. Jika uang Aqil ditambah dengan tiga kali lipat uang Ari sama dengan Rp42.000,00, tentukanlah:
   a. model matematika dari soal cerita tersebut,
   b. besarnya uang masing-masing,
   c. selisih uang Aqil dan uang Ari.
5. Jumlah umur ayah dan umur ibu adalah 60 tahun dan selisih umur mereka adalah 4 tahun (ayah lebih tua). Tentukanlah:
   a. model matematika dari soal cerita tersebut,
   b. umur Ayah dan umur Ibu,
   c. perbandingan umur Ayah dan umur Ibu

Sumber: Dokumentasi Penulis

Bab 5

Teorema Pythagoras dan Garis-Garis pada Segitiga

Televisi sebagai media informasi, memiliki banyak sekali keunggulan dibandingkan dengan media lainnya, baik media cetak maupun media elektronik.

Salah satu keunggulannya adalah televisi mampu memvisualisasikan suatu informasi secara langsung. Untuk memenuhi berbagai kebutuhan yang beragam, televisi diproduksi dalam berbagai macam ukuran. Pada umumnya, ukuran televisi dinyatakan dalam satuan inci (1 inci = 2,54 cm), mulai dari 14 inci, 21 inci, 35 inci, sampai 49 inci.

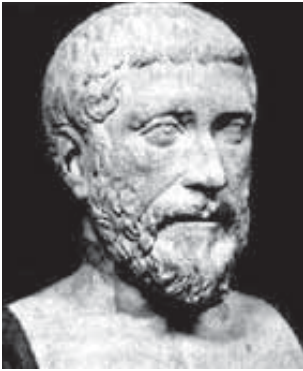
Perlu diingat, ukuran televisi yang dinyatakan dalam satuan inci tersebut merupakan panjang diagonal layar televisi. Misalkan kamu memiliki televisi 21 inci. Jika lebar televisi tersebut adalah 16 inci, berapakah tingginya? Kamu dapat dengan mudah menghitung tinggi televisi tersebut jika kamu memahami konsep teorema Pythagoras.

Pada bab ini, kamu akan mempelajari teorema Pythagoras beserta pengertian, penggunaan, dan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari. Selain itu, akan diuraikan pula perhitungan garis tinggi dan garis berat pada segitiga sebagai perluasaan dari teorema Pythagoras.

Uji Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari materi pada bab ini, kerjakan soal-soal berikut.

1. Hitunglah.
   a. 6^2 = ... c. $1,5^2$ = ...
   b. 10^2 = ... d. $2,4^2$ = ...
2. Cari akar kuadrat dari:
   a. 144 c. 5,76
   b. 2,56 d. 900
3. Berapakah hasil dari:
   a. $\sqrt{10^2 - 6^2}$ c. $\sqrt{0,5^2 - 0,3^2}$
   b. $\sqrt{12^2 + 16^2}$
4. Hitunglah:
   a. $\sqrt{108}$ c. $\sqrt{972}$
   b. $\sqrt{175}$

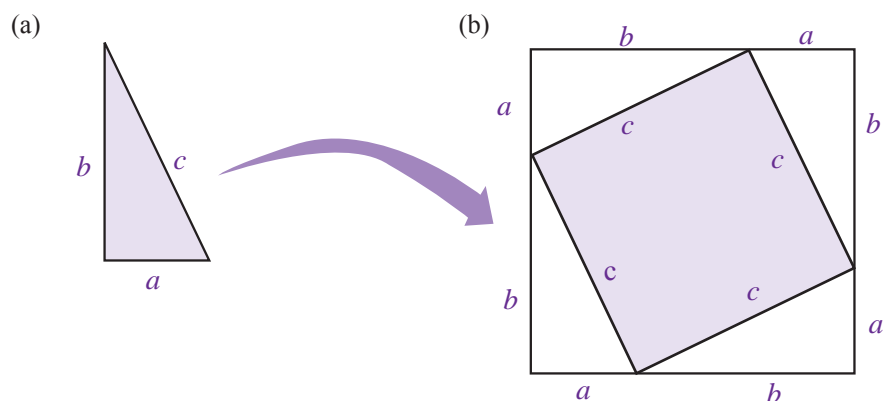
A. Teorema Pythagoras

Sumber: *www.stenudd.com*

Gambar 5.1 : Pythagoras

1. Pengertian Teorema Pythagoras

Siapakah Pythagoras itu? Pythagoras adalah seorang ahli matematika dan filsafat berkebangsaan Yunani yang hidup pada tahun 569–475 sebelum Masehi. Sebagai ahli metematika, ia mengungkapkan bahwa kuadrat panjang sisi miring suatu segitiga siku-siku adalah sama dengan jumlah kuadrat panjang sisi-sisi yang lain. Untuk membuktikan hal ini, coba kamu lakukan Kegiatan 5.1.

Kegiatan 5.1

1. Sediakan kertas karton, pensil, penggaris, lem, dan gunting.
2. Buatlah empat buah segitiga yang sama dengan panjang sisi alas a = 3 cm, sisi tegak b = 4 cm, dan sisi miring c = 5 cm. Lalu guntinglah segitiga-segitiga itu.
3. Buatlah sebuah persegi dengan panjang sisi yang sama dengan sisi miring segitiga, yaitu c = 5 cm. Warnailah daerah persegi tersebut, lalu guntinglah.
4. Tempelkan persegi di karton dan atur posisi keempat segitiga sehingga sisi c segitiga berimpit dengan setiap sisi persegi dan terbentuk sebuah persegi besar dengan sisi (a + b). Lihat gambar berikut.

5. Isilah titik-titik untuk mencari hubungan antara a, b, dan c.
   Luas persegi besar = luas persegi kecil + (4 × Luas segitiga)

$$(a + ...)^2 = (...)^2 + \left[4 \times \frac{... \times b}{....}\right]$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (...)^2 + ...$$

$$(...)^2\ 2 \cdot 3 \cdot 4 + (...)^2 = (...)^2 + ...$$

$$(...)^2 + ... + (...)^b = (...)^2 + ...$$

$$(...)^2 + (...)^2 = (...)^2$$

$$.... = ...$$

6. Ulangi langkah-langkah diatas untk nilai $a = 6$, $b = 8$, dan $c = 10$.
   Setelah melakukan kegiatan tersebut, apa yang dapat kamu ketahui tentang hubungan nilai a, b, dan c?

Jika kamu perhatikan dengan cermat akan diperoleh hubungan $c^2 = a^2 + b^2$, dimana c adalah panjang sisi miring, a adalah panjang alas, dan b adalah tinggi. Dari hubungan tersebut dapat dikatakan bahwa kuadrat panjang sisi miring segitiga siku-siku sama dengan jumlah kuadrat sisi-sisi lainya. Inilah yang disebut **teorema Pythagoras**

Cara lain untuk membuktikan teorema Pythagoras adalah dengan menempatkan persegi di setiap sisi segitiga siku-siku. Coba kamu perhatikan Gambar 5.2 secara saksama.

Gambar 5.2 : Segitiga siku-siku dengan persegi di setiap sisinya.

Gambar tersebut menunjukkan sebuah segitiga yang memiliki persegi pada setiap sisinya. Ukuran segitiga tersebut adalah

- Panjang sisi miring = AC = 5 satuan.
- Tinggi = BC = 3 satuan.
- Panjang sisi alas = AB = 4 satuan.

Perhatikan bahwa luas persegi pada sisi miring sama dengan luas persegi pada sisi alas ditambah luas persegi pada tinggi segitiga. Pernyataan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut.

Luas persegi pada sisi miring = luas persegi pada sisi alas + luas persegi pada tinggi.

$25 = 16 + 9$

$(5)^2 = (4)^2 + (3)^2$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

Sekali lagi, uraian ini membenarkan kebenaran teorema Pythagoras .

Untuk lebih jelasnya, coba kamu pelajari Contoh Soal 5.1

Contoh Soal 5.1

Hitunglah luas persegi berikut ini sehingga memenuhi teorema Pythagoras

Jawab:

a. Luas persegi pada sisi miring = luas persegi pada sisi alas + luas persegi pada tinggi
   $A = 3 + 2$
   $A = 5$
   Jadi, luas persegi A adalah 5 cm^2.

b. Luas persegi pada sisi miring = luas persegi pada sisi alas + luas persegi pada tinggi
   $10 = 4 + B$
   $10 - 4 = B$
   $6 = B$
   $B = 6$
   Jadi, luas persegi B adalah 6 cm^2.

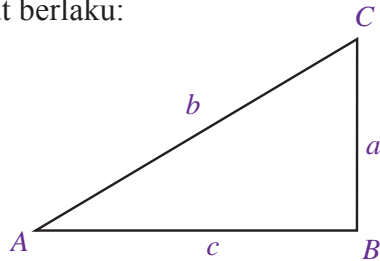
3. Luas persegi pada sisi miring = luas persegi pada sisi alas + luas persegi pada tinggi
   $21 = C + 20$
   $21 - 20 = C$
   $1 = C$
   $C = 1$
   Jadi, luas persegi C adalah 1 m^2

2. Penulisan Teorema Pythagoras

Pada materi sebelumnya, kamu telah mempelajari teorema Pythagoras pada segitiga siku-siku. Coba perhatikan Gambar 5.3. Gambar tersebut menunjukkan sebuah segitiga siku-siku *ABC* dengan panjang sisi miring *b*, panjang sisi alas *c*, dan tinggi *a*. Berdasarkan, teorema Pythagoras, dalam segitiga siku-siku tersebut berlaku:

$b^2 = c^2 + a^2$

atau

$b = \sqrt{c^2 + a^2}$

Gambar 5.3 : Segitiga siku-siku ABC

Sekarang, bagaimana menentukan panjang sisi-sisi yang lain? seperti panjang sisi alas c atau tinggi a? Dengan menggunakan rumus umum teorema Pythagoras, diperoleh perhitungan sebagai berikut.

$$b^2 = c^2 + a^2 \Rightarrow c^2 = b^2 - a^2$$
$$c = \sqrt{b^2 - a^2}$$
$$b^2 = c^2 + a^2 \Rightarrow a^2 = b^2 - c^2$$
$$a = \sqrt{b^2 - c^2}$$

.

Dari uraian tersebut, penulisan teorema Pythagoras pada setiap sisi segitiga siku-siku dapat dituliskan sebagai berikut.

$$b = \sqrt{c^2 + a^2}$$
$$c = \sqrt{b^2 - a^2}$$
$$a = \sqrt{b^2 - c^2}$$

Untuk lebih jelasnya, coba kamu pelajari Contoh Soal 5.2 berikut ini.

Contoh Soal 5.2

Perhatikan gambar segitiga *ABC* berikut. Segitiga tersebut merupakan gabungan dari dua segitiga siku-siku *ADC* dan *BDC*. Tentukan rumus Pythagoras untuk menghitung:

a. panjang sisi *p*,
b. panjang sisi *s*,
c. panjang sisi *q*,
d. panjang sisi *r*,
e. panjang sisi *t*.

Jawab:

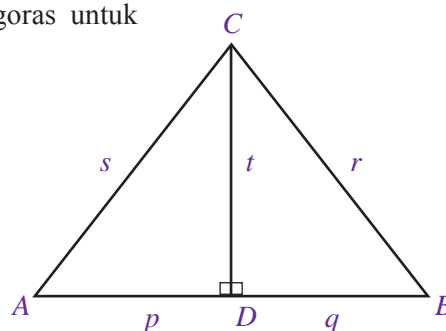
a. Perhatikan segitiga *ADC*. Dari segitiga tersebut diperoleh:
$p^2 = s^2 - t^2$
$p = \sqrt{s^2 - t^2}$

b. Perhatikan segitiga *ADC*. Dari segitiga tersebut diperoleh:

$s^2 = p^2 + t^2$
$s = \sqrt{p^2 + t^2}$

c. Perhatikan segitiga *BDC*. Dari segitiga tersebut diperoleh:
$q^2 = r^2 - t^2$
$q = \sqrt{r^2 - t^2}$

d. Perhatikan segitiga *DBC*. Dari segitiga tersebut diperoleh:
$r^2 = q^2 + t^2$
$r = \sqrt{q^2 + t^2}$

e. Khusus untuk nilai t, dapat diperoleh dari dua segitiga dua segitiga siku-siku *ADC* dan *BDC*
- Perhatikan segitiga *ADC*. Dari segitiga tersebut diperoleh:
  $t^2 = s^2 - p^2$
  $t = \sqrt{s^2 - p^2}$
- Perhatikan segitiga *BDC*. Dari segitiga tersebut diperoleh:
  $t^2 = r^2 - q^2$
  $t = \sqrt{r^2 - q^2}$

3. Penggunaan Teorema Pythagoras

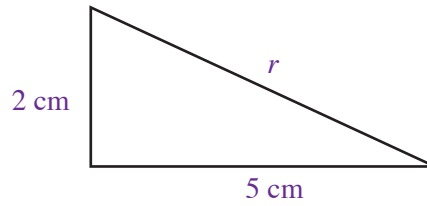
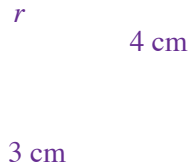
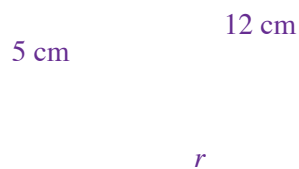
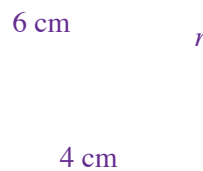
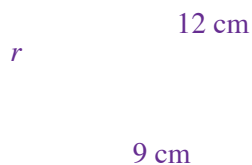
Seperti yang telah disebutkan sebelumnya, teorema Pythagoras banyak sekali digunakan dalam perhitungan bidang matematika yang lain. Misalnya, menghitung panjang sisi-sisi segitiga, menentukan diagonal pada bangun datar, sampai perhitungan diagonal ruang pada suatu bangun ruang.

Berikut ini akan diuraikan penggunaan teorema Pythagoras pada segitiga dan bangun datar.

a. Penggunaan Teorema Pythagoras pada Sisi-Sisi Segitiga.

Pada materi sebelumnya, kamu telah mempelajari cara menghitung panjang sisi-sisi segitiga dengan menggunakan teorema Pythagoras. Sekarang coba perhatikan dan pelajari Contoh Soal 5.3.

Contoh Soal 5.3

1. Tentukanlah nilai r untuk segitiga siku-siku berikut
   a.

   b.

r
4 cm
3 cm

   c.

12 cm
5 cm
r

   d.

6 cm
r
4 cm

   e.

12 cm
r
9 cm

2. Perhatikan segitiga siku-siku ABC pada gambar berikut. Agar memenuhi teorema Pythagoras, tentukan:

C
$\sqrt{52}$ cm
$3r$ cm
A
$2r$ cm
B

   a. nilai r,
   b. panjang sisi AB,
   c. panjang sisi BC.

Solusi Matematika

Perhatikan gambar berikut.

L
M
K

Pernyataan-pernyataan berikut yang merupakan teorema Pythagoras adalah ....

a. $(ML)^2 = (MK)^2 - (KL)^2$
b. $(KL)^2 = (MK)^2 - (ML)^2$
c. $(ML)^2 = (ML)^2 + (MK)^2$
d. $(ML)^2 = (MK)^2 + (KL)^2$

Jawab:

L
M
K

Pada gambar ΔKLM di samping,
sisi miring = ML
sisi siku-siku 1 = MK
sisi siku-siku 2 = KL
Menurut teorema Pythagoras,
(sisi miring)^2 = (sisi siku-siku 1)^2 + (sisi siku-siku 2)^2
$(ML)^2 = (MK)^2 + (KL)^2$

Jawaban: d

UN SMP, 2007

Jawab:

1. a. $r^2 = 2^2 + 5^2$
   $= 4 + 25$
   $= 29$
   $r = \sqrt{29}$
   Jadi, nilai $r = \sqrt{29}$ cm.

   b. $r^2 = 4^2 + 3^2$
   $= 16 + 9$
   $= 25$
   $r = \sqrt{25}$
   $= 5$
   Jadi, nilai r = 5 cm.

   c. $r^2 = 12^2 – 5^2$
   $= 144 – 25$
   $= 119$
   $r = \sqrt{119}$
   Jadi, nilai $r = \sqrt{119}$ cm.

   d. $r^2 = 6^2 – 4^2$
   $= 36 – 16$
   $= 20$
   $r = \sqrt{20}$
   Jadi, nilai $r = \sqrt{20}$ cm.

   e. $r^2 = 12^2 – 9^2$
   $= 144 – 81$
   $= 63$
   $r = \sqrt{63}$
   Jadi, nilai $r = \sqrt{63}$.

Plus +

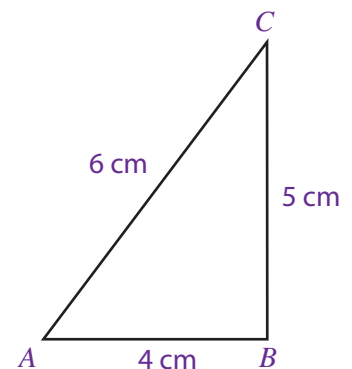
$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

2. Dengan menggunakan teorema Pythagoras, pada segitiga *ABC* berlaku hubungan sebagai berikut.
   $AC^2 = AB^2 + BC^2$
   $\left(\sqrt{52}\right)^2 = (2r)^2 + (3r)^2$
   $52 = 4r^2 + 9r^2$
   $52 = 13r^2$
   $r^2 = \frac{52}{13}$
   $r^2 = 4$
   $r = \sqrt{4}$
   $r = 2$
   a. Dari uraian tersebut, diperoleh $r = 2$.
   b. Panjang sisi $AB = 2r$
   $= 2(2) = 4$
   Jadi, panjang sisi $AB = 4$ cm
   c. Panjang sisi $AC = 3r$
   $= 3(2)$
   Jadi, panjang sisi $AC = 6$ cm ■

Selain menghitung panjang sisi segitiga siku-siku, teorema Pythagoras pun dapat digunakan untuk menentukan jenis-jenis segitiga. Sebagaimana yang telah kamu pelajari, berdasarkan besar sudutnya segitiga dibagi menjadi tiga jenis, yaitu segitiga tumpul, segitiga siku-siku, dan segitiga lancip.

- pada segitiga lancip, semua titik sudutnya berukuran kurang dari 90°.
- Segitiga siku-siku, salah satu titik sudutnya berukuran 90°
- Segitiga tumpul, salah satu titik sudutnya berukuran lebih dari 90°

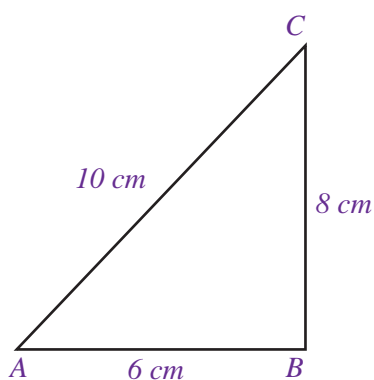
Coba kamu perhatikan uraian berikut ini.

Gambar 5.4 merupakan gambar segitiga lancip dengan ukuran sisi terpanjang adalah 6 cm dan sisi-sisi lainnya adalah 4 cm dan 5 cm.

Gambar 5.4 : Segitiga lancip

- Kuadrat dari sisi terpanjang adalah
  $6^2 = 36$
- Jumlah kuadrat dari sisi-sisi yang lain:
  $4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$

Ternyata, kuadrat sisi terpanjang lebih kecil dari jumlah kuadrat sisi-sisi yang lain. Jadi, dalam segitiga lancip berlaku:

$6^2 < 4^2 + 5^2$

$AC^2 < AB^2 + BC^2$

Gambar 5.5 : Segitiga siku-siku

Sekarang coba kamu perhatikan Gambar 5.5 secara saksama. Gambar 5.5 merupakan gambar segitiga siku-siku *ABC* dengan sisi-sisinya adalah 6 cm, 8 cm, dan 10 cm.

- Kuadrat dari sisi terpanjang adalah
  $10^2 = 100$
- Jumlah kuadrat dari sisi-sisi yang lain:
  $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

Ternyata, kuadrat sisi terpanjang sama dengan jumlah kuadrat sisi-sisi yang lain. Jadi, dalam segitiga siku-siku berlaku:

$10^2 = 6^2 + 8^2$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

Gambar 5.6 : Segitiga tumpul

Pada Gambar 5.6 terlihat sebuah segitiga tumpul dengan ukuran 12 cm, 8 cm dan 5 cm.

- Kuadrat sisi terpanjang
  $12^2 = 144$
- Jumlah kuadrat dari sisi-sisi yang lain:
  $5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$

Ternyata, kuadrat sisi terpanjang lebih besar dari jumlah kuadrat sisi yang lain. Jadi, dalam segitiga tumpul berlaku:

$12^2 > 5^2 + 8^2$

$AC^2 > AB^2 + BC^2$

Untuk lebih jelasnya, coba kamu pelajari Contoh Soal 5.4 berikut ini.

Contoh Soal 5.4

Tentukan jenis segitiga yang memiliki ukuran sebagai berikut.

a. 2 cm, 3 cm, 5 cm
b. 8 cm, 10 cm, 11 cm
c. 5 cm, 12 cm, 13 cm
d. 4 cm, 6 cm, 7 cm
e. 2 cm, 8 cm, 10 cm

Jawab:

a. • Kuadrat sisi terpanjang:
   $5^2 = 25$
   • Jumlah kuadrat sisi-sisi yang lain:
   $2^2 + 3^2 = 4 + 9$
   $= 13$
   Diperoleh:
   $5^2 > 2^2 + 3^2$
   Jadi, segitiga tersebut adalah segitiga tumpul.

Plus +

Tiga bilangan asli yang memenuhi teorema Pythagoras disebut *tripel Pythagoras*. Contoh tripel Pythagoras adalah bilangan 6, 8, dan 10.

b. • Kuadrat sisi terpanjang:
$11^2 = 121$
• Jumlah kuadrat sisi-sisi yang lain:
$8^2 + 10^2 = 64 + 100$
$= 164$
Diperoleh:
$11^2 < 18^2 + 10^2$
Jadi, segitiga tersebut adalah segitiga lancip.

c. • Kuadrat sisi terpanjang:
$13^2 = 169$
• Jumlah kuadrat sisi-sisi yang lain:
$5^2 + 12^2 = 25 + 144$
$= 169$
Diperoleh:
$13^2 = 5^2 + 12^2$
Jadi, segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku.

d. • Kudrat sisi terpanjang:
$7^2 = 49$
• Jumlah kuadrat sisi-sisi yang lain:
$4^2 + 6^2 = 16 + 36$
$= 52$
Diperoleh:
$7^2 < 4^2 + 6^2$
Jadi, segitiga tersebut adalah segitiga lancip.

e. • Kuadrat sisi terpanjang:
$10^2 = 100$
• Jumlah kuadrat sisi-sisi yang lain:
$2^2 + 8^2 = 4 + 64$
$= 68$
Diperoleh:
$10^2 > 2^2 + 8^2$
Jadi, segitiga tersebut adalah segitiga tumpul

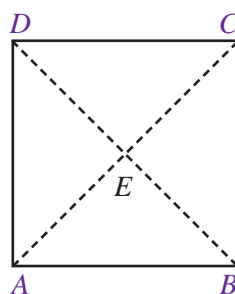
Plus +

Kelipatan dari bilangan-bilangan tripel Pythagoras juga merupakan tripel Pythagoras, contohnya 12, 16, dan 20 yang merupakan kelipatan dari 6, 8, dan 10

b. Penggunaan Teorema Pythagoras pada Bangun Datar

Pada kondisi tertentu, teorema Pythagoras digunakan dalam perhitungan bangun datar. Misalnya, menghitung panjang diagonal, menghitung sisi miring trapesium, dan lain sebagainya. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh-contoh soal berikut ini.

Contoh Soal 5.5

1. Perhatikan gambar persegi *ABCD* pada gambar di samping. Jika sisi persegi tersebut adalah 7 cm, tentukan:
   a. panjang diagonal *AC*,
   b. panjang diagonal *BD*,
   c. panjang *AE*,
   d. luas persegi *ABCD*.
2. Sebuah persegi memiliki panjang diagonal 6 cm. Tentukan:
   a. panjang sisi persegi,
   b. luas persegi tersebut.

Jawab:

1. **a.** Dengan menggunakan teorema Pythagoras, berlaku hubungan:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 7^2 + 7^2$

$= 49 + 49$

$= 98$

$AC = \sqrt{98}$

$= \sqrt{49 \yen 2}$

$= \sqrt{49} \yen \sqrt{2}$

$= 7\sqrt{2}$

Jadi, panjang diagonal $AC = 7\sqrt{2}$ cm.

b. Dalam sebuah persegi, panjang diagonal memiliki ukuran yang sama dengan diagonal lain. Jadi, dapat dituliskan:

panjang diagonal BD = panjang diagonal AC

$= 7\sqrt{2}$ cm

c. Perhatikan gambar pada soal. Panjang garis AE adalah setengah dari pnajang garis AC. Sehingga:

panjang garis AE $= \frac{1}{2} \times$ panjang diagonal AC

$= \frac{1}{2} \times 7\sqrt{2}$

$= \frac{7}{2}\sqrt{2}$

Jadi, panjang $AE = \frac{7}{2}\sqrt{2}$ cm.

d. Panjang sisi persegi $ABCD$ adalah 7 cm. Jadi, luas persegi tersebut.

Luas persegi = sisi × sisi

$= 7 \times 7$

$= 49$

Jadi, luas persegi $ABCD = 49 \text{ cm}^2$.

2. Misalkan panjang sisi persegi s cm. Dengan menggunakan teorema Pyhtagoras, berlaku hubungan:

kuadrat panjang diagonal = jumlah kuadrat sisi-sisi yang lain

$6^2 = s^2 + s^2$

$36 = 2s^2$

$s^2 = \frac{36}{2}$

$s^2 = 18$

$s = \sqrt{18}$

a. Dari uraian tersebut diperoleh panjang sisi persegi adalah $\sqrt{18}$ cm .

b. Luas persegi dapat dihitung sebagai berikut.

Luas persegi = sisi × sisi

$= \sqrt{18} \times \sqrt{18} = 18$

Jadi, luas persegi tersebut adalah 18 cm^2

Contoh Soal 5.6

Perhatikan gambar persegipanjang *ABCD*, di samping. Diketahui ukuran panjang dan lebar persegipanjang tersebut berturut-turut adalah 15 cm dan 8 cm.

Tentukan:

a. luas persegipanjang *ABCD*,
b. panjang diagonal *BD*,
c. panjang *BE*.

Jawab:

a. Luas persegipanjang *ABCD* dapat dihitung sebagai berikut.

Luas persegipanjang $= \text{panjang} \times \text{lebar}$
$= 15 \times 8$
$= 120$

Jadi, luas $ABCD = 120 \text{ cm}^2$

b. Dengan menggunakan teorema Pythagoras, berlaku hubungan:

$BD^2 = AB^2 + AD^2$
$BD^2 = 15^2 + 8^2$
$= 225 + 64$
$= 289$
$BD = \sqrt{289} = 17$

Jadi, panjang $BD = 17$ cm.

c. Perhatikan gambar. Panjang garis *BE* adalah $\frac{1}{2}$ kali panjang diagonal *BD*, sehingga:

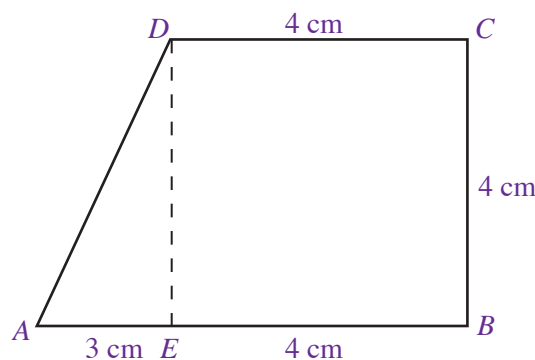
panjang $BE = \frac{1}{2} \times$ panjang diagonal BD
$= \frac{1}{2} \times 17 = 8\frac{1}{2}$

Jadi, panjang $BD = 8\frac{1}{2}$ cm

Contoh Soal 5.7

Perhatikan trapesium *ABCD* pada gambar di samping. Diketahui panjang alas trapesium 7 cm, panjang sisi atas 4 cm, dan tinggi trapesium 4 cm.

Tentukan:

a. panjang sisi miring *AD*,
b. keliling trapesim *ABCD*,
c. luas trapesim *ABCD*.

Jawab:

a. Perhatikan segitiga *ADE* pada gambar. Diketahui panjang *DE* adalah 4 cm dan panjang *AE* adalah 3 cm. Dengan menggunakan teorema Pythagoras, berlaku hubungan:

$AD^2 = AE^2 + DE^2$
$AD^2 = 3^2 + 4^2$
$= 9 + 16 = 25$
$AD = \sqrt{25} = 5$

Jadi, panjang $AD = 5$ cm.

b. Untuk mencari keliling trapesium, dapat dihitung sebagai berikut.

Keliling trapesium $ABCD$ = panjang AB + panjang BC + panjang CD + panjang DA

$= 7 + 4 + 4 + 5$

$= 20$

Jadi, keliling trapesium $ABCD = 20$ cm.

c. Untuk mencari luas trapesium, digunakan rumus sebagai berikut.

$$\text{Luas trapesium } ABCD = \frac{(AB + CD) \times BC}{2}$$

$$= \frac{(17 + 4) \times 4}{2}$$

$$= 11 \times 2$$

$$= 22$$

Jadi, luas trapesium $ABCD = 22 \text{ cm}^2$

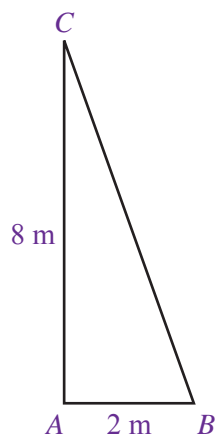
4. Penerapan Teorema Pythagoras

Dalam kehidupan sehari-hari banyak sekali masalah-masalah yang dapat dipecahkan menggunakan teorema Pythagoras. Untuk mempermudah perhitungan, alangkah baiknya jika permasalahan tersebut dituangkan dalam bentuk gambar.

Coba kamu perhatikan dan pelajari contoh-contoh soal berikut ini secara saksama.

Contoh Soal 5.8

Perhatikan gambar di samping sebuah tangga bersandar pada tembok dengan posisi seperti pada gambar. Jarak antara kaki tangga dengan tembok 2 meter dan jarak antara tanah dan ujung atas tangga 8 meter. Hitunglah panjang tangga.

Jawab:

- Langkah pertama adalah menggambarkan apa yang diceritakan dalam soal. Gambar di samping menunjukkan sebuah segitiga siku-siku ABC yang memiliki panjang AC (jarak tanah ke ujung atas tangga) 8 meter, panjang AB (jarak kaki tangga ke tembok) 2 meter, dan BC dimisalkan tangga yang hendak dicari panjangnya.
- Langkah kedua, gunakan teorema Pythagoras sehingga berlaku hubungan:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 2^2 + 8^2$$

$$= 4 + 64$$

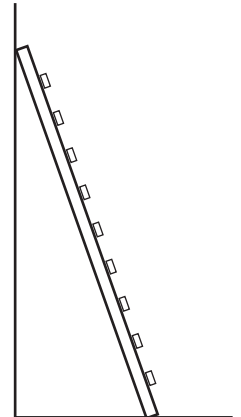
$$= 68 \text{ m}^2$$

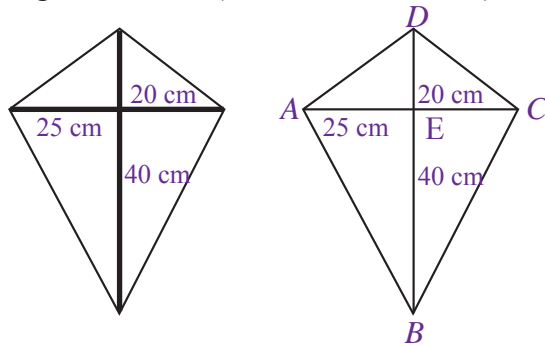
$$BC = \sqrt{68}$$

$$= \sqrt{4 \times 17}$$

$$= \sqrt{4} . \sqrt{17}$$

$$= 2\sqrt{17}$$

Jadi, panjang tangga adalah $2\sqrt{17}$ tm

Contoh Soal 5.9

Gambar berikut adalah sebuah rangka layang-layang disusun dari dua bilah bambu yang panjangnya 60 cm dan 50 cm. Bilah bambu paling panjang dijadikan rangka tegak. Jika dari tiap ujung-ujung bilah bambu tersebut di hubungkan dengan tali, hitunglah tali yang dibutuhkan (lilitan tali diabaikan).

Jawab:

- Langkah pertama, gambarkan soal cerita tersebut, Perhatikan gambar berikut.
- Langkah kedua, gunakan teorema Pythagoras sehingga diperoleh hubungan:

$AD^2 = AE^2 + DE^2$
$AD^2 = 25^2 + 20^2$
$= 625 + 400$
$= 1.025$
$AD = \sqrt{1.025}$
$= \sqrt{25 \times 41}$
$= \sqrt{25} . \sqrt{41}$
$= 5\sqrt{41}$
$AB^2 = AE^2 + EB^2$
$AB^2 = 25^2 + 40^2$
$= 625 + 1600$
$= 2.225$
$AB = \sqrt{2.225}$
$= \sqrt{25 \times 89}$
$= \sqrt{25} \times \sqrt{89}$
$= 5\sqrt{89}$

- Langkah ketiga, menghitung panjang tali.

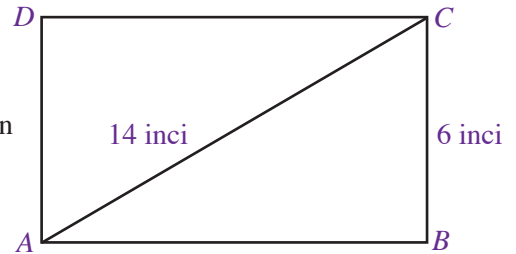
Oleh karena panjang AD sama dengan CD maka CD $5\sqrt{41}$ cm.
PanjangBC sama dengan panjang AB, yaitu $5\sqrt{89}$ cm. Sehingga diperoleh:
panjang tali $= AB + BC + CD + DA$
$= 5\sqrt{89} + 5\sqrt{89} + 5\sqrt{41} + 5\sqrt{41}$
$= 10\sqrt{89} + 10\sqrt{41}$
$= 10\left(\sqrt{89} + \sqrt{41}\right)$
Jadi, panjang tali yang dibutuhkan adalah $10\left(\sqrt{89} + \sqrt{41}\right)$

Contoh Soal 5.10

Panjang diagonal sebuah televisi 14 inci. Jika tinggi layar televisi tersebut adalah 6 inci, berapakah lebar televisi tersebut?

Jawab:

- Langkah pertama, gambarkan soal cerita tersebut. Perhatikan gambar disamping.
  Misalkan, layar televisi digambarkan sebagai persegipanjang *ABCD*.

- Langkah kedua, untuk menentukan lebar layar televisi, yaitu panjang *AB*, gunakan teorema Pythagoras sehingga diperoleh hubungan:

$AB^2 = AC^2 - BC^2$
$= 14^2 - 6^2$
$= 196 - 36$
$= 160$
$AB = \sqrt{160}$
$= \sqrt{16 \times 10}$
$= \sqrt{16} \times \sqrt{10}$
$= 4\sqrt{10}$

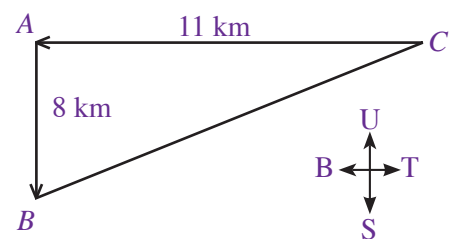
Jadi, lebar televisi tersebut adalah $4\sqrt{10}$ inci.

Contoh Soal 5.11

Sebuah kapal laut berlayar ke arah barat sejauh 11 km. Kemudian, kapal laut berbelok ke arah selatan sejauh 8 km. Hitunglah jarak kapal laut dari titik awal keberangkatan ke titik akhir.

Jawab:

- Langkah pertama, gambarkan soal cerita tersebut. Perhatikan gambar di samping. Jalur yang di tempuh oleh kapal laut digambarkan dalam bentuk segitiga siku-siku *ABC*.

- Langkah kedua, untuk menentukan panjang *ABC*, gunakan teorema Pythagoras sehingga diperoleh hubungan:

$ABC^2 = AB^2 + BC^2$
$= 8^2 + 11^2$
$= 121 + 64$
$= 185$

$BC = \sqrt{185}$

Jadi, jarak dari titik awal ke titik akhir adalah $\sqrt{185}$ km.

Uji Kompetensi 5.1

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Dengan menggunakan teorema Pythagoras, tentukan nilai x pada segitiga siku-siku berikut.

a.

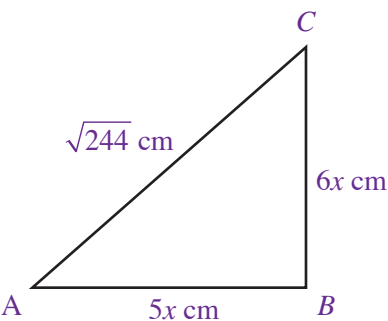
b.

c.

d.

x
10 cm
6 cm

e.

2. Perhatikan segitiga siku-siku *ABC* pada gambar berikut. Agar memenuhi teorema Pythagoras, tentukan:

a. nilai x,
b. panjang *AB*.
c. panjang *BC*.
e. keliling segitiga *ABC*.

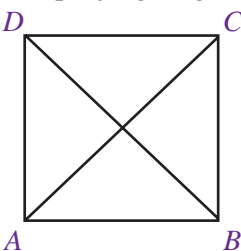
3. Tentukan jenis segitiga yang memiliki ukuran sebagai berikut.

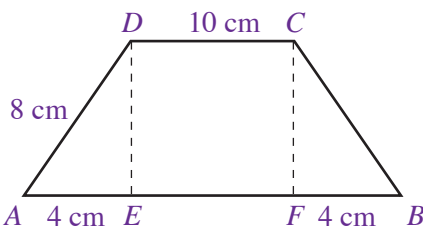
a. 3 cm, 4 cm, 5 cm
b. 5 cm, 12 cm, 13 cm
c. 10 cm, 12 cm, 16 cm
d. 8 cm, 11 cm, 19 cm
e. 2 cm, 8 cm, 14 cm

4. Sebidang tanah memiliki bentuk persegi dengan panjang sisi 8 meter. Tentukan:

a. luas tanah,
b. keliling tanah,
c. panjang diagonal tanah.

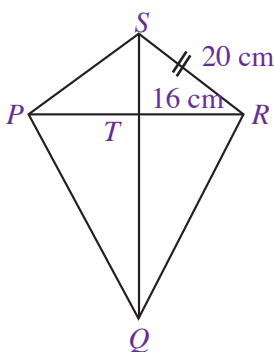
5.

Seutas kawat digunakan untuk membuat kerangka persegi seperti pada gambar di samping. Jika panjang sisi kerangka persegi yang diinginkan adalah 15 cm, tentukan:

a. panjang diagonal *AC*,
b. panjang diagonal *BD*,
c. panjang kawat yang diperlukan untuk membuat kerangka tersebut.

6. Perhatikan gambar trapesium berikut. Dari gambar tersebut, sebuah trapesium sebarang *ABCD* memiliki ukuran seperti pada gambar.

Tentukan:

a. tinggi trapesium
b. panjang *BC*
c. keliling trapesium *ABCD*
d. luas trapesim *ABCD*

7. Gambar berikut adalah layang-layang *PQRS*, jika diketahui panjang *QS* =52 cm, Tentukan:

a. panjang *PT*
b. panjang *PQ*
c. keliling *PQRS*
d. luas *PQRS*

8. Sebuah kapal berlayar dari titik A ke arah timur sejauh 3 km. Kemudian, kapal tersebut berbelok ke arah utara sejauh 4 km dan sampai di titik B. Dari titik B, kapal layar tersebut melanjutkan perjalanannya ke arah timur sejauh 6 km dan berbelok ke arah utara sejauh 8 km. Akhirnya, sampailah kapal tersebut di titik C. Tentukan:
   a. jarak titik A ke titik B,
   b. jarak titik B ke titik C,
   c. jarak titik A ke titik C.
9. Sebuah televisi memiliki lebar layar 15 cm dan tinggi layar 8 cm. Tentukanlah
   a. panjang diagonal layar televisi tersebut,
   b. keliling layar televisi tersebut,
   c. luas layar televisi tersebut.
10. Seorang lelaki harus berenang melintasi sungai selebar 12 m agar dapat sampai ke pohon pisang yang terletak di seberang sungai. Namun, pada jarak 7 m disebelah kanan pohon pisang itu terdapat seekor buaya. Berapa jarak buaya dari lelaki itu?

B. Garis-Garis Pada Segitiga

Di kelas VII, kamu telah mengenal berbagai macam garis pada segitiga. Garis-garis pada segitiga tersebut adalah garis tinggi, garis berat, garis bagi, dan garis sumbu. Masih ingatkah kamu pengertian untuk masing-masing garis tersebut ?

Pada subbab ini, kamu akan mempelajari bagaimana menentukan dan menghitung panjang garis-garis pada segitiga. Namun, garis-garis pada segitiga yang dibahas pada bab ini dibatasi hanya garis tinggi dan garis berat.

1. Garis Tinggi Pada Segitiga

Sebelum mempelajari perhitungan garis tinggi pada segitiga, kamu harus memahami terlebih dahulu proyeksi titik atau garis pada suatu garis. Proyeksi merupakan dasar perhitungan garis tinggi pada segitiga. Coba kamu pelajari uraian berikut.

(a)

(b)

Gambar 5.7: Proyeksi titik pada garis

a. Proyeksi

Untuk memahami apa yang dimaksud dengan proyeksi, coba kamu perhatikan Gambar 5.7(a). Pada gambar tersebut terlihat titik P diproyeksikan terhadap garis AB. Hasil proyeksi titik P tersebut adalah titik P'.

Sekarang, coba kamu perhatikan Gambar 5.7(b) gambar tersebut menunjukan proyeksi titik P terhadap garis AB dengan posisi yang berbeda. Hasil proyeksi titik P tersebut adalah P'.

Dari uraian ini apa yang dapat kamu ketahui? Proyeksi sebuah titik adalah pembentukan bayangan suatu titik terhadap satu bidang, dengan syarat garis hubung titik dan titik hasil proyeksinya harus tegak lurus dengan bidang tersebut.

Bagaimana panjang garis proyeksi tersebut ? Ada dua macam perhitungan yang dapat kamu lakukan. Berdasarkan materi persamaan garis lurus yang telah kamu pelajari, dapat diuraikan sebagai berikut.

- Menentukan panjang proyeksi titik P (x_1, y_1), jika titik hasil proyeksi P' (x_2, y_2) diketahui.

$$\text{Panjang proyeksi} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Menentukan panjang proyeksi titik P (x_1, y_1), jika persamaan garis $ax + by + c = 0$ diketahui.

$$\text{Panjang proyeksi} = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Untuk lebih jelasnya, coba kamu perhatikan dan pelajari Contoh Soal 5.12.

Contoh Soal 5.12

1. Sebuah titik $A(3, 5)$ di proyeksikan pada sebuah garis dan menghasilkan titik hasil proyeksi $A'(–2, –3)$. Tentukan panjang garis hubung dari titik A ke titik A'.
2. Garis $2x + y – 5 = 0$ merupakan bidang alas proyeksi titik $B(0, 3)$. Tentukan panjang garis proyeksi titik B ke garis tersebut.

Jawab:

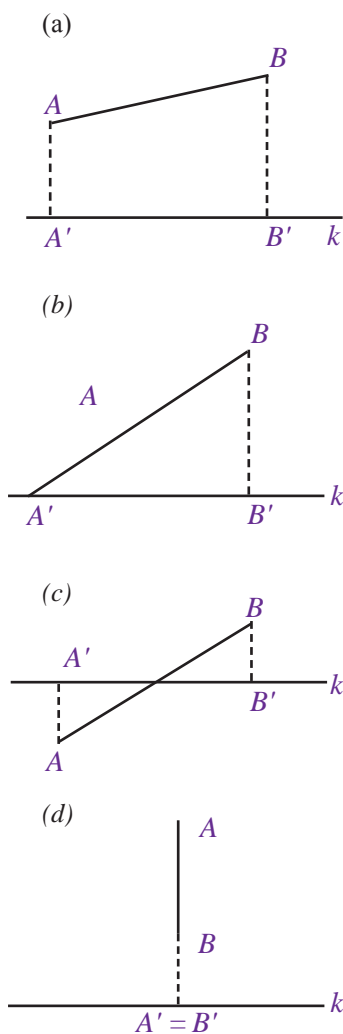
1. Diketahui: $A(3, 5)$ didapat $x_1 = 3$ $y_1 = 5$
   Dari titik $A'(–2, –3)$ didapat $x_1 = –2$ $y_2 = – 3$

   Panjang proyeksi

   $$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
   $$= \sqrt{(-2 - 3)^2 + (-3 - 5)_2}$$
   $$= \sqrt{(-5)^2 + (-8)^2}$$
   $$= \sqrt{\quad + \quad} \quad 8$$
   $$= \sqrt{25} \quad 64$$

   Jadi, panjang proyeksi titik tersebut adalah $\sqrt{89}$ cm.
2. Diketahui: $B(0, 3)$ didapat $x_1 = 0$, $y_1 = 3$
   $2x + y – 5$ didapat $a = 2$, $b = 1$, $c = – 5$
   diperoleh
   Panjang proyeksi

   $$= \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$
   $$= \left| \frac{2 \cdot 0 + 1 . 3 - 5}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \right|$$
   $$= \left| \frac{0 + 3 - 5}{\sqrt{4 + 1}} \right|$$
   $$= \left| \frac{-2}{\sqrt{5}} \right|$$
   $$= \frac{2}{\sqrt{5}}$$
   $$= \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

Jadi, panjang proyeksi tersebut adalah $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ cm

Gambar 5.8 : Proyeksi garis terhadap garis

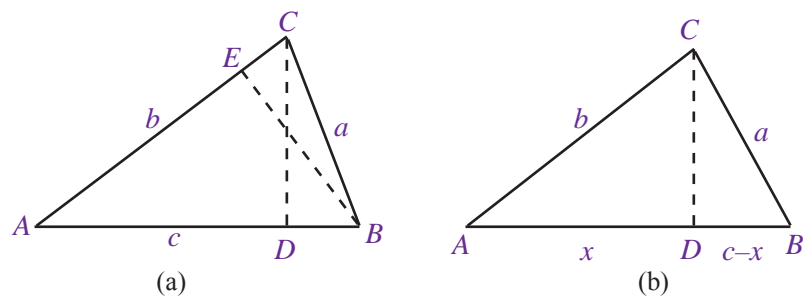
Selain pada titik, proyeksi pun dapat dilakukan pada sebuah garis. Coba kamu perhatikan Gambar 5.8. Pada gambar tersebut terlihat berbagai macam proyeksi suatu garis terhadap garis yang lain. Misalkan suatu garis *AB* diproyeksikan terhadap garis k. Hasil yang diperoleh adalah garis *A'B'*.

Perhatikan kembali Gambar 5.8 secara saksama. Kedua garis yang diproyeksikan selalu tegak lurus dengan garis bidang alas.

Pada Gambar 5.8.(a), garis *A'B'* merupakan hasil proyeksi dari garis *AB*. Pada Gambar 5.8.(b), garis *A'B'* merupakan hasil proyeksi dari garis *AB* namun, titik *A* berimpit dengan hasil proyeksinya karena titik *A* terletak di garis *k*.

Pada Gambar 5.8.(c), garis *AB* memotong garis bidang proyeksi, sehingga titik *A* diproyeksikan ke atas menuju garis *k* dan b titik *B* diproyeksikan ke bawah terhadap garis *k*.

Terakhir, pada Gambar 5.8.(d), garis *AB* tegak lurus terhadap garis bidang proyeksi. Sehingga garis hasil proyeksi berupa sebuah titik pada garis *k*.

Sekarang, bagaimana menghitung panjang garis proyeksi suatu garis terhadap garis lainnya ? Coba kamu perhatikan Gambar 5.9 ini.

Gambar 5.9 : Panjang garis proyeksi

Perhatikan segitiga *ABC* pada Gambar 5.9.(a) beserta ukuran-ukuran di setiap sisinya. Dari gambar terlihat bahwa *AD* adalah hasil proyeksi *AC* terhadap *AB*. Untuk menghitungnya, misalkan panjang *AD* adalah *x*. Dengan demikian panjang *DB* menjadi *c–x*. Perhatikan Gambar 5.9.(b).

Dengan menggunakan teorema Pythagoras. Kamu dapat menghitung panjang garis proyeksi *AC* terhadap *AB*, yaitu panjang *AD*.

- Perhatikan Δ *ADC*, panjang *CD* dapat dihitung sebagai berikut.
  $CD^2 = b^2 - x^2$
- Perhatikan Δ *DBC*, panjang *CD* dapat dihitung sebagai berikut.
  $CD^2 = a^2 - (c - x)^2$
- Dari kedua uraian tersebut, diperoleh persamaan:

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$$
$$b^2 - x^2 = a^2 - (c^2 - 2cx + x^2)$$
$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$$
$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cx$$
$$x = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}$$

Perhatikan kembali Gambar 5.9.(a). Panjang garis proyeksi sisi *b* terhadap sisi *c*, yaitu *AD* adalah :

$$AD = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}$$

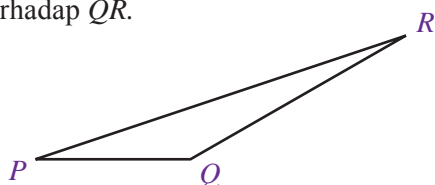
Dengan cara yang sama, panjang garis proyeksi sisi a terhadap sisi c, yaitu panjang DB adalah:

$$DB = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$$

Begitu pula dengan panjang garis proyeksi sisi a terhadap sisi b, yaitu panjang EC adalah:

$$EC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$$

Contoh Soal 5.13

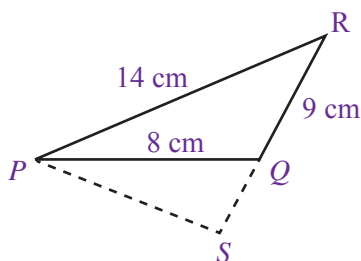
Perhatikan segitiga sebarang PQR pada gambar berikut. Jika panjang PQ adalah 8 cm, panjang QR adalah 9 cm dan panjang PR adalah 14 cm, tentukanlah panjang proyeksi PQ terhadap QR.

Perhatikan gambar berikut. Hasil proyeksi PQ terhadap QR adalah garis SQ. Untuk menghitung panjang SQ, gunakan rumus umum proyeksi suatu garis terhadap garis lain diperoleh :

$$SQ = \frac{PR^2 - QR^2 - PQ^2}{2QR}$$

$$= \frac{14^2 - 9^2 - 8^2}{2(9)}$$

$$= \frac{196 - 81 - 64}{18}$$

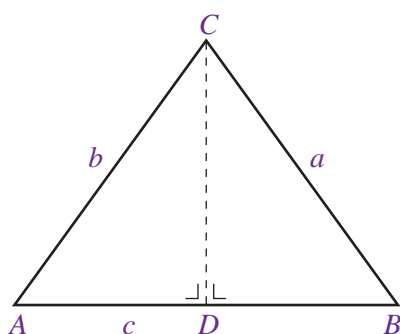
$$= \frac{51}{18}$$

$$= 2\frac{15}{18}$$

Jadi, panjang proyeksi PQ terhadap QR adalah $2\frac{15}{18}$ cm

b. Menghitung garis tinggi pada segitiga

Masih ingatkah kamu apa yang dimaksud dengan garis tinggi pada segitiga ? Perhatikan segitiga sebarang PQR pada Gambar 5.10 Garis PU, QT, dan RS adalah garis-garis tinggi segitiga PQR. Jadi, garis tinggi pada segitiga adalah garis yang ditarik dari sudut segitiga dan tegak lurus terhadap sisi yang ada di hadapan sudut segitiga tersebut.

Gambar 5.10 : Garis tinggi segitiga

Sekarang bagaimana cara menghitung garis tinggi pada suatu segitga? Ada rumus umum yang dapat kamu gunakan untuk menghitungnya. Untuk lebih jelasnya coba kamu pelajari uraian berikut secara saksama.

Gambar 5.12

Misalkan, diketahui segitiga sebarang ABC dengan ukuran-ukuran sisi-sisi seperti pada gambar disamping. Perhatikan bahwa CD adalah garis tinggi pada segtiga ABC, untuk menghitung panjang CD, perhatikan uraian berikut.

- Pada segitiga ADC, berlaku teorema Pythagoras:
  $CD^2 = b^2 - AD^2$ ....(1)
- Dari hasil proyeksi garis AC terhadap AB diperoleh: $AD = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$ ....(2)

Kemudian, subtitusikan nilai AD ke persamaan (1) diperoleh:

$CD^2 = b^2 - AD^2$

$$CD^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2$$

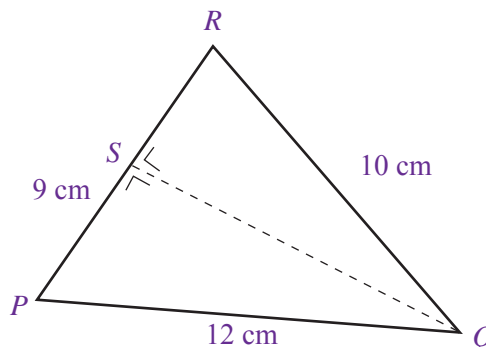
$$CD = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2}$$

Dari uraian ini di peroleh bahwa panjang garis tinggi segitiga ABC, yaitu panjang CD, adalah

$$CD = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2}$$

Dengan cara yang sama, coba kamu tentukan sendiri panjang garis tinggi yang lain pada segitiga ABC tersebut

Contoh Soal 5.14

Perhatikan segitiga sebarang PQR pada gambar di samping. Jika ukuran sisi-sisi segitiga tersebut seperti pada gambar, tentukan panjang garis tinggi QS pada segitiga PQR.

Jawab:

Dari gambar diketahui:

p = 10 cm, q = 9 cm, dan r = 12 cm

Dengan mengunakan rumus perhitungan garis tinggi, diperoleh:

$$QS = \sqrt{p^2 - \left(\frac{p^2 + q^2 - r^2}{2q}\right)^2}$$

$$= \sqrt{10^2 - \left(\frac{10^2 + 9^2 - 12^2}{2(9\text{cm})}\right)^2}$$

$$= \sqrt{100 - \left(\frac{100 + 81 - 144}{18}\right)^2}$$

$$= \sqrt{100 - \left(\frac{37}{18}\right)^2}$$

$$QS = \sqrt{100 - \frac{1.369}{324}}$$

$$= \sqrt{\frac{32.400 - 1.369}{324}}$$

$$= \sqrt{\frac{31.031}{324}}$$

Jadi, panjang $QS = \sqrt{\frac{31.031}{324}}$

Contoh Soal 5.15

Perhatikan segitiga siku-siku ABC pada gambar di samping. Dengan ukuran-ukuran seperti yang ditunjukan pada gambar, tentukan:

a. panjang BC,
b. panjang garis tinggi AD,
c. luas segitiga ABC.

Jawab:

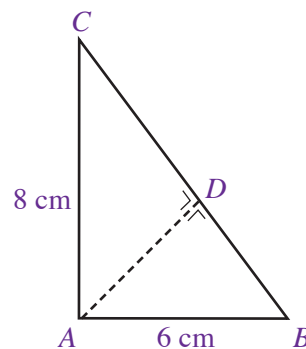
a. Untuk menentukan panjang BC, gunakan teorema Pythagoras.

$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$= (6 \text{ cm})^2 + (8 \text{ cm})^2$
$= 36 \text{ cm}^2 + 64 \text{ cm}^2$
$= 100 \text{ cm}^2$

$$BC = \sqrt{100 \text{ cm}^2}$$
$$= 10 \text{ cm}$$

b. Untuk menentukan panjang garis tinggi AD, gunakan rumus perhitungan garis tinggi.

$$AD = \sqrt{AC^2 - \left(\frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2BC}\right)^2}$$

$$= \sqrt{8^2 - \left(\frac{8^2 + 10^2 - 16^2}{2(10)}\right)^2}$$

$$= \sqrt{64 - \left(\frac{64 + 100 - 36}{20}\right)^2}$$

$$= \sqrt{64 - \left(\frac{128}{20}\right)^2}$$

$$= \sqrt{64 - 40,96} = 4,8$$

Jadi, panjang AD = 4,8 cm.

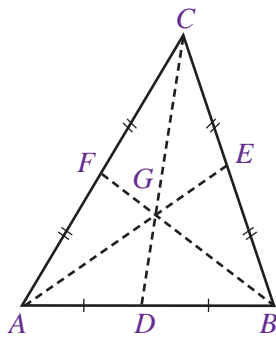
c. Untuk menentukan luas segitiga ABC sebagai berikut

$$\text{Luas} = \frac{BC \times AD}{2}$$

$$= \frac{10 \times 4,8}{2}$$

$$= \frac{48}{2}$$

$$= 24$$

Jadi, luas segitiga ABC = 24 cm^2

Gambar 5.11 : Garis Berat

2. Garis Berat pada Segitiga

Sama halnya dengan garis tinggi, garis berat pada segitiga pun telah kamu pelajari di kelas VII. Ingatkah kamu apa yang dimaksud dengan garis berat? Coba perhatikan Gambar 5.11. Gambar tersebut menunjukkan sebuah segitiga sebarang ABC. Perhatikan bahwa AE, BF, dan CD merupakan garis berat segitiga ABC.

Jadi, apa yang dapat kamu ketahui tentang garis berat? Garis berat pada segitiga adalah garis yang ditarik dari sudut segitiga dan membagi dua dengan sama panjang sisi yang ada di hadapan sudut tersebut. Titik G pada segitiga ABC merupakan titik berat segitiga.

Bagaimana cara menghitung panjang garis berat pada suatu segitiga? Coba perhatikan segitiga sebarang ABC pada Gambar 5.12 di samping. Garis EC merupakan garis berat sedangkan garis DC merupakan garis tinggi. Untuk menghitung panjang EC, perhatikan uraian berikut.

Gambar 5.12 : Panjang Garis Berat

- Dari segitiga ABC, diperoleh proyeksi garis BC terhadap BE, yaitu DE atau x. Jadi,

$$DE = x = \frac{a^2 - \left(\frac{1}{2}c\right)^2 - d^2}{2\left(\frac{1}{2}c\right)}$$

$$x = \frac{a^2 - \left(\frac{1}{2}c\right)^2 - d^2}{c}$$

$$cx = a^2 - \left(\frac{1}{2}c\right)^2 - d^2 \ldots(1)$$

Dari segitiga AEC, diperoleh proyeksi garis EC terhadap AE, yaitu DE atau x. Jadi,

$$DE = x = \frac{d^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 - b^2}{2\left(\frac{1}{2}c\right)}$$

$$= \frac{d^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 - b^2}{c}$$

$$cx = d^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 - b^2 \text{ ...(2)}$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$a^2 - \left(\frac{1}{2}c\right)^2 - d^2 = d^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 - b^2$$

$$-d^2 - d^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 - b^2 - a^2$$

$$-2d^2 = 2\left(\frac{1}{2}c\right)^2 - b^2 - a^2$$

$$2d^2 = -2\left(\frac{1}{2}c\right)^2 + b^2 + a^2$$

$$2d^2 = -\frac{1}{2}c^2 + b^2 + a^2$$

$$d^2 = \frac{-\frac{1}{2}c^2 + b^2 + a^2}{2}$$

$$d^2 = -\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}a^2$$

$$d^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2$$

$$d = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2}$$

Jadi, rumus untuk menentukan panjang garis berat d pada segitiga adalah:

$$d = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2}$$

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh soal berikut

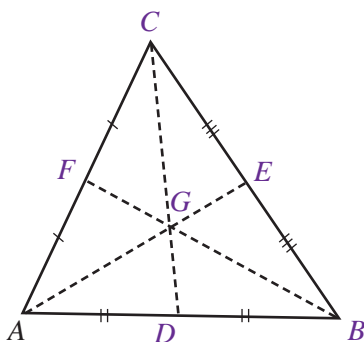
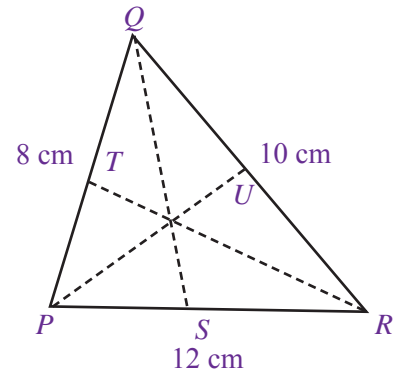
Contoh Soal 5.16

Sebuah segitiga PQR memiliki ukuran panjang sisi PQ = 8 cm, QR = 10 cm, dan PR = 12 cm.
Hitunglah panjang garis berat segitiga tersebut untuk setiap sudutnya

Jawab:
Perhatikan gambar di samping. Dari gambar tersebut, QS, PU, dan RT adalah garis berat segitiga PQR.

$$QS = \sqrt{\frac{1}{2}PQ^2 + \frac{1}{2}QR^2 - \frac{1}{4}PR^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}8^2 + \frac{1}{2}10^2 - \frac{1}{4}12^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}.64 + \frac{1}{2}.100 - \frac{1}{4}.144}$$
$$= \sqrt{32 + 50 - 36}$$

$$PQ = \sqrt{\frac{1}{2}PR^2 + \frac{1}{2}PQ^2 - \frac{1}{4}QR^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}12^2 + \frac{1}{2}8^2 - \frac{1}{4}10^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}.144 + \frac{1}{2}.64 - \frac{1}{4}.100}$$
$$= \sqrt{72 + 32 - 25}$$

$$RT = \sqrt{\frac{1}{2}PR^2 + \frac{1}{2}RQ^2 - \frac{1}{4}PQ^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}12^2 + \frac{1}{2}10^2 - \frac{1}{4}8^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}.144 + \frac{1}{2}.100 - \frac{1}{4}.64}$$
$$= \sqrt{72 + 50 - 32}$$

Jadi, diperoleh panjang garis berat segitiga PQR adalah sebagai berikut.

$QS = \sqrt{46}$ cm

$PU = \sqrt{79}$ cm

$RT = \sqrt{106}$ cm

Sekarang, coba kamu perhatikan segitiga sebarang ABC pada Gambar di samping. Segitiga sebarang ABC memiliki garis berat $AEBF$, dan CD. Titik G yang merupakan perpotongan antara tiga garis berat dinamakan titik berat segitiga ABC. Berikut ini adalah perbandingan ukuran yang dimiliki oleh segitiga sebarang ABC pada gambar

- Untuk panjang sisi
  $AD : DB = 1 : 1$
  $BE : EC = 1 : 1$
  $CF : FA = 1 : 1$
- Untuk panjang sisi berat
  $AG : GE = 2 : 1$
  $BG : GF = 2 : 1$
  $CG : GD = 2 : 1$

Dari uraian tersebut, jelas bahwa jarak titik sudut segitiga ke titik berat adalah $\frac{2}{3}$ kali panjang garis berat. Adapun jarak dari titik berat ke pertengahan sisi segitiga adalah $\frac{1}{3}$ kali dari panjang garis berat.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan Contoh Soal 5.19

Perhatikan segitiga siku-siku *ABC* pada gambar berikut. Jika ukuran sisi segitiga tersebut adalah 8 cm, 6 cm, dan 10 cm, tentukan:

a. panjang garis berat *BD*,
b. panjang *BE*,
c. panjang *DE*.

Jawab:

a. Untuk menentukan panjang *BD*, gunakan rumus umum untuk menghitung panjang garis berat.

$$BD = \sqrt{\frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}BC^2 - \frac{1}{4}AC^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 6^2 + \frac{1}{2}\cdot 8^2 - \frac{1}{4}\cdot 10^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 36 + \frac{1}{2}\cdot 64 - \frac{1}{4}\cdot 100} = \sqrt{18 + 32 - 25}$$
$$= \sqrt{25} = 5$$

Jadi, panjang garis berat *BD* adalah 5 cm.

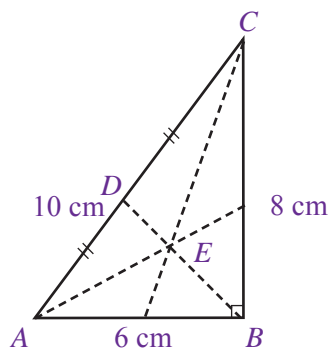
b. Panjang $BE = \frac{2}{3} \times$ panjang BD

$$= \frac{2}{3} \times 5$$
$$= \frac{10}{3}$$

Jadi, panjang $BD = \frac{10}{3}$ cm

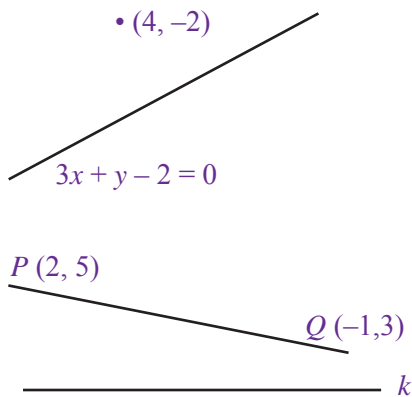
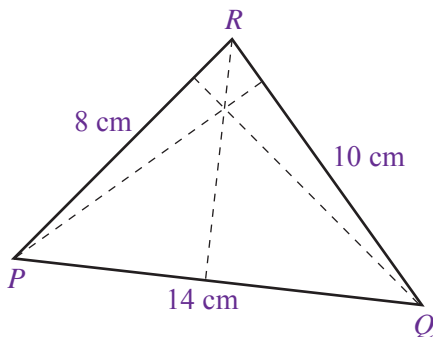
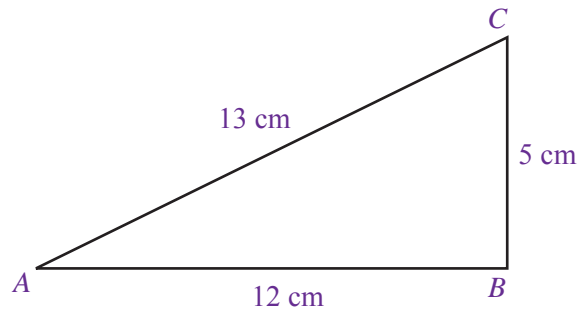
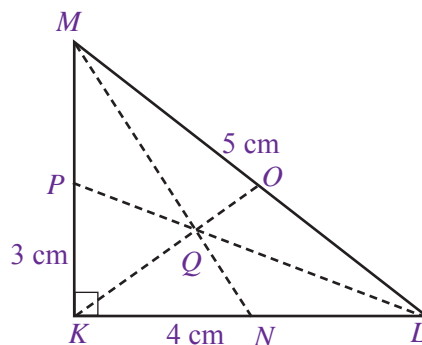
c. Panjang $DE = \frac{1}{3} \times$ panjang BD

$$= \frac{1}{3} \times 5$$
$$= \frac{5}{3}$$

Jadi, panjang $DE = \frac{5}{3}$ cm

Uji Kompetensi 5.2

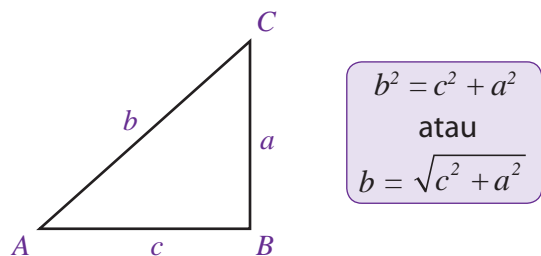
Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Perhatikan gambar berikut ini. Gambar tersebut menunjukkan proyeksi sebuah titik terhadap sebuah garis. Jika garis tersebut memiliki persamaan $3x + y - 2 = 0$ dan koordinat titik tersebut adalah (4, –2), maka:
   a. tentukan jarak antara titik tersebut dengan titik hasil penyelesaiannya,
   b. gambarkan posisi titik hasil proyeksi garis tersebut.

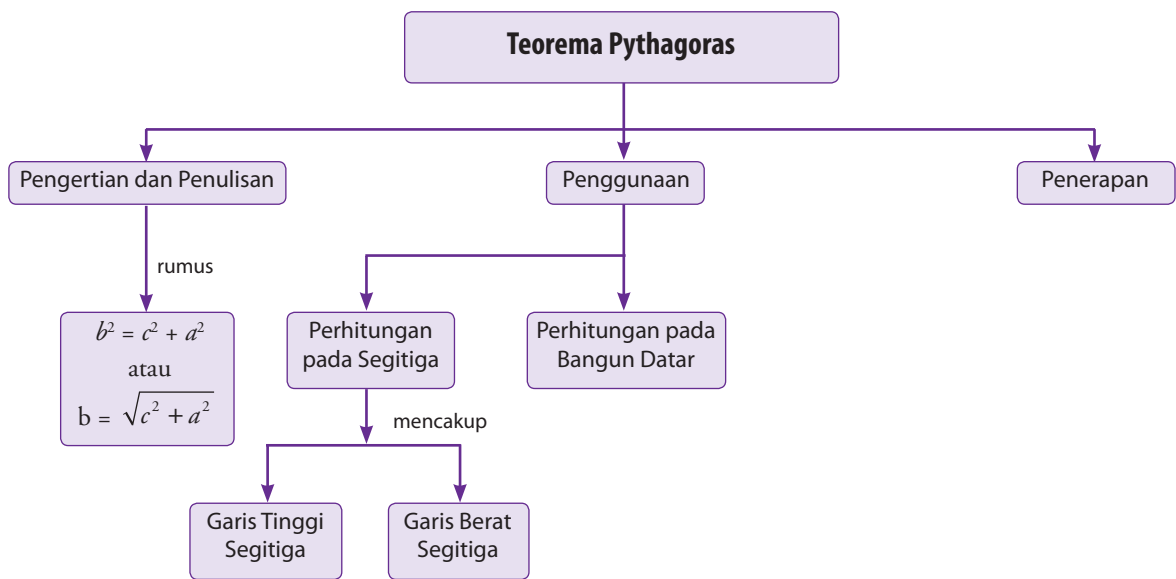
2.

   Dari gambar tersebut, sebuah garis PQ akan diproyeksikan terhadap garis k. Diketahui koordinat $P(2, 5)$ dan $Q(-1, 3)$ serta garis k memiliki persamaan $x - y = 0$.
   a. Jika hasil proyeksi titik P memiliki koordinat P' (2, – 6), tentukan panjang garis PP'.
   b. Tentukan jarak antara Q dengan Q'.
   c. Tentukan koordinat titik Q'.
3. Perhatikan segitiga PQR pada gambar berikut. Jika panjang sisi-sisi segitiga tersebut adalah 14 cm, 10 cm, dan 8 cm, tentukan:

   a. panjang proyeksi PQ terhadap QR,
   b. panjang proyeksi PQ terhadap PR,
   c. panjang proyeksi QR terhadap PQ,
   d. panjang proyeksi QR terhadap PR.
4.

   Dari gambar segitiga siku-siku ABC tersebut, tentukan:
   a. panjang garis tinggi untuk A,
   b. panjang garis tinggi untuk B,
   c. panjang garis tinggi untuk C.
5. Perhatikan gambar segitiga siku-siku KLM berikut tentukan:

   a. panjang berat untuk garis k,
   b. panjang berat untuk garis L,
   c. panjang garis berat untuk M,
   d. panjang MQ,
   e. panjang QN.

Rangkuman

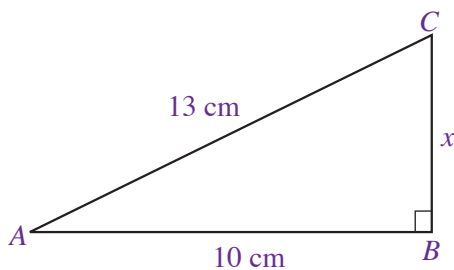
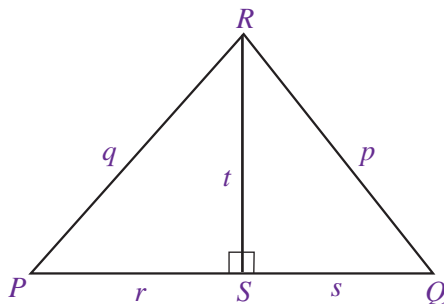
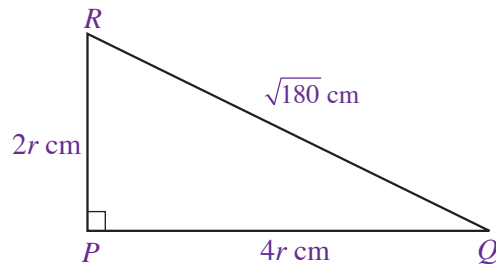
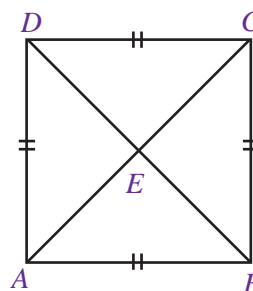
1. Teorema Pythagoras menyatakan bahwa kuadrat panjang sisi miring segitiga siku-siku adalah sama dengan jumlah kuadrat sisi-sisi lainnya.
2. Teorema Pythagoras ditulis sebagai berikut.

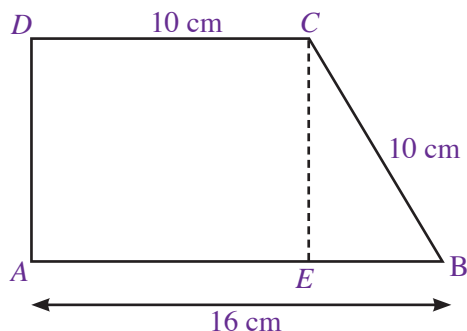
3. Garis tinggi pada segitiga adalah garis yang ditarik dari sudut segitiga dan tegak lurus terhadap sisi yang ada di hadapan sudut segitiga tersebut.
4. Garis berat pada segitiga adalah garis yang ditarik dari sudut segitiga dan membagi dua dengan sama panjang sisi yang ada di hadapan sudut tersebut.

Refleksi

- Pada bab Teorema Pythagoras dan Garis-Garis pada Segitiga ini, adakah materi yang menurutmu sulit untuk kamu pahami?
- Setelah mempelajari bab ini, apakah kamu merasa kesulitan memahami materi tertentu? Materi apakah itu?
- Kesan apakah yang kamu dapatkan setelah mempelajari materi pada bab ini?

Peta Konsep

Uji Kompetensi Bab 5

A. Pilihlah satu jawaban yang benar.

1. Bilangan-bilangan berikut yang memenuhi teorema Pythagoras adalah sebagai berikut, kecuali ....
   a. 3, 4, dan 5 c. 5, 12, dan 13
   b. 6, 8, dan 10 d. 6, 8, dan 16
2. Sisi sebuah segitiga siku-siku yang memiliki panjang sisi alas 21 cm dan tinggi 20 cm adalah ....
   a. 27 cm c. 29 cm
   b. 28 cm d. 30 cm
3. Sebuah segitiga siku-siku memiliki sisi miring 12 cm. Jika panjang alas segitiga adalah 8 cm, maka tinggi segitga tersebut adalah ....
   a. $\sqrt{20}$ cm c. $\sqrt{80}$ cm
   b. 20 cm d. 80 cm
4. Perhatikan gambar dibawah ini.

   Nilai x pada segitiga siku-siku ABC adalah ....
   a. $\sqrt{269}$ c. $\sqrt{69}$
   b. $\sqrt{296}$ d. $\sqrt{96}$
5. Perhatikan gambar di bawah ini.

   Dari segitiga PQR tersebut berlaku hubungan berikut, *kecuali* ....
   a. $q^2 = r^2 + t^2$
   b. $t^2 = q^2 - r^2$
   c. $t^2 = p^2 - s^2$
   d. $s^2 = t^2 - p^2$
6. Sebuah segitiga siku-siku memiliki panjang sisi miring 17 cm. Jika panjang alasnya 15 cm, maka luas segitiga adalah ....
   a. 8 cm c. 30 cm^2
   b. 16 cm^2 d. 60 cm^2
7. Keliling sebuah segitiga siku-siku yang memiliki panjang sisi miring 25 cm dan tinggi 24 cm adalah ....
   a. 7 cm c. 32 cm
   b. 49 cm d. 56 cm
8. Perhatikan gambar berikut.

   Dari segitiga siku-siku PQR tersebut, nilai r yang memenuhi adalah ....
   a. 1 c. 3
   b. 2 d. 4
9. Sebuah segitiga PQR memiliki panjang 10 cm, 12 cm, dan 14 cm. Segitiga tersebut merupakan segitiga ....
   a. lancip c. siku-siku
   b. tumpul d. sama sisi
10. Luas sebuah persegi adalah 25 cm^2. Panjang diagonal persegi tersebut adalah ....
    a. $5\sqrt{2}$ c. $\sqrt{52}$
    b. $2\sqrt{5}$ d. $\sqrt{25}$
11. Perhatikan gambar berikut.

    Jika panjang AC adalah 10 cm, luas persegi panjang $ABCD$ tersebut adalah ....
    a. $5\sqrt{2}$ cm^2 c. 25 cm^2
    b. $2\sqrt{5}$ cm^2 d. 50 cm^2
12. Panjang diagonal sebuah persegi panjang adalah 10 cm. Jika lebar persegi panjang tersebut adalah 6 cm, maka keliling persegi panjang adalah ....
    a. 14 cm c. 48 cm
    b. 28 cm d. 64 cm

13. Perhatikan gambar berikut.

Dari gambar trapesium *ABCD*, tinggi trapesium adalah ....

a. 6 cm c. 8 cm
b. 7 cm d. 9 cm

14. Perhatikan kembali soal nomor 13. Keliling trapesium tersebut adalah ....

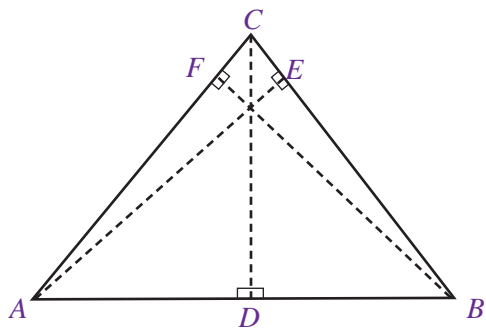
a. 34 cm c. 54 cm
b. 44 cm d. 64 cm

15. Suatu segitiga siku-siku samakaki sisi miringnya 10 cm, panjang kaki-kakinya adalah ... cm

a. 13 cm c. 15 cm
b. 14 cm d. 16 cm

16. Sebuah kapal berlayar ke arah utara sejauh 11 km. Kemudian, kapal tersebut berbelok ke arah barat dan berlayar sejauh 9 km. Jarak dari titik awal keberangkatan ke titik akhir adalah ....

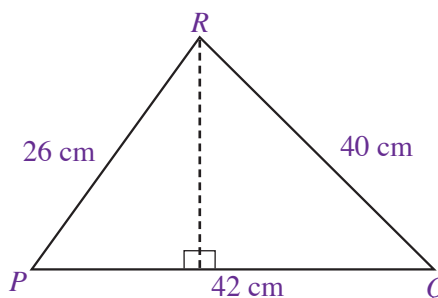
a. $\sqrt{102}$ km c. $\sqrt{202}$ km
b. 102 km d. 202 km

17. Perhatikan gambar berikut

Dari gambar tersebut, proyeksi garis *BC* terhadap *AB* ditunjukan oleh ....

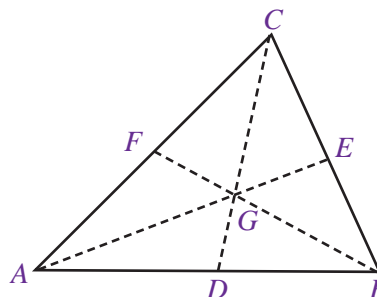
a. *AD* c. *EC*
b. *DB* d. *AF*

18. Sebuah titik *P* (–2, –3) diproyeksikan pada sebuah garis sehingga menghasilkan titik hasil proyeksi *P'* (5, 2). Jarak antara *P* dan *P'* adalah ....

a. $\sqrt{72}$ cm
b. 72 cm
c. $\sqrt{74}$ cm
d. 74 cm

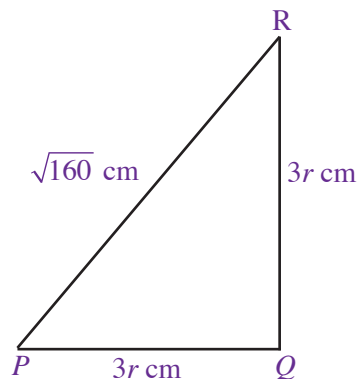
19. Perhatikan gambar berikut.

Dari gambar tersebut, panjang garis tinggi untuk *R* adalah ....

a. 23 cm c. 25 cm
b. 24 cm d. 26 cm

20. Perhatikan gambar berikut.

Dari segitiga sebarang *ABC* tersebut, panjang garis berat *AE* adalah 27 cm. Panjang *EG* adalah ....

a. 6 cm c. 12 cm
b. 9 cm d. 18 cm

B. Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Diketahui sebuah segitiga siku-siku seperti yang digambarkan sebagai berikut.

Dari segitiga *PQR* tersebut, tentukan:

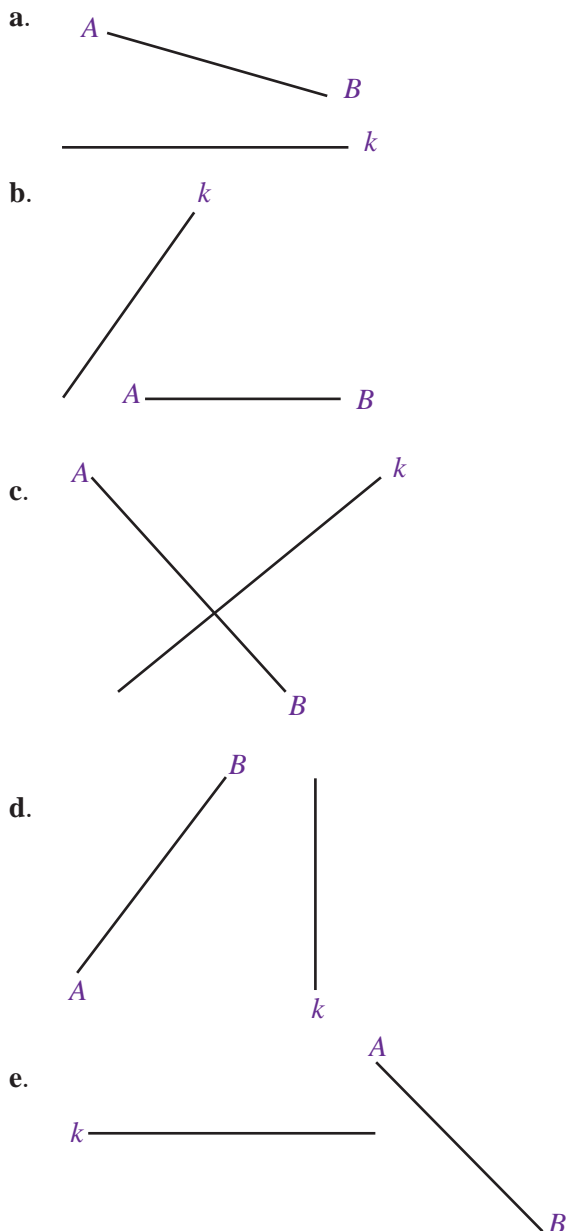
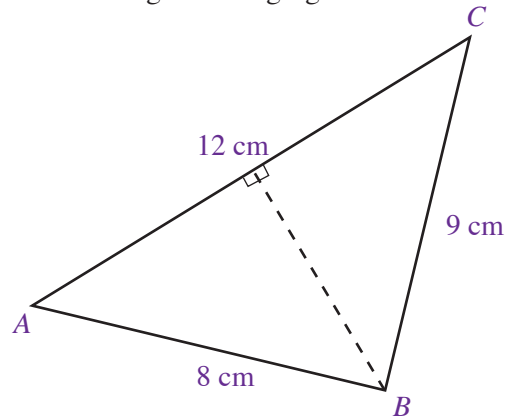
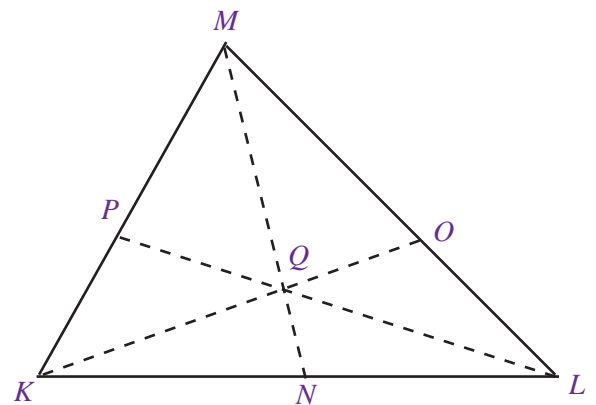
a. nilai *r*,
b. panjang *PQ*,
c. panjang *QR*,
d. keliling segitiga *PQR*,
e. luas segitiga *PQR*.

2. Keliling suatu persegipanjang 42 cm. Jika lebar persegipanjang tersebut 9 cm, tentukan:
   a. panjang persegipanjang,
   b. panjang diagonalnya,
3. Salinlah gambar berikut, kemudian tentukan hasil proyeksi garis *PQ* terhadap garis *k*.
   a.

   b.

   c.

   d.

   e.

4. Perhatikan gambar segitiga berikut

   Dari gambar tersebut, tentukanlah:
   a. panjang garis tinggi untuk *B,*
   b. luas segitiga *ABC,*
   c. keliling segitiga *ABC.*
5. Perhatikan gambar segitiga sebarang *KLM* berikut.

   Jika panjang *KL* = 10 cm, *LM* = 11 cm, dan *KM* = 8 cm, tentukanlah:
   a. panjang garis berat *KO,*
   b. panjang *KQ,*
   c. panjang *MP,*
   d. panjang *OQ,*
   e. panjang *LO.*

Uji Kompetensi Semester 1

Pilihlah satu jawaban yang benar.

1. Bentuk sederhana dari :

$3(p + 4) – 5(p – 3)$ adalah ....

a. $2p + 27$
b. $–2p + 27$
c. $–2p – 27$
d. $2p – 27$

2. Hasil kali dari $(p + 9)(p – 6)$ adalah ....

a. $p^2 + 3p + 54$
b. $p^2 – 3p – 54$
c. $p^2 + 3p – 54$
d. $p^2 – 3p + 54$

3. Faktor dari $p^2 + p – 30$ adalah ....

a. $(p + 6)(p + 5)$
b. $(p – 6)(p – 5)$
c. $(p + 6)(p – 5)$
d. $(p – 6)(p + 5)$

4. Jika $p = –1$, $q = 1$ dan $r = 2$ maka nilai dari $p^2q + qr – r$ adalah ....

a. 0
b. 1
c. –1
d. 2

5. Bentuk sederhana dari :

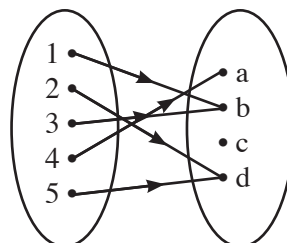
$\frac{6}{(x + 3)} - \frac{5}{(x - 4)}$ adalah ...

a. $\frac{x - 39}{x^2 - x - 12}$

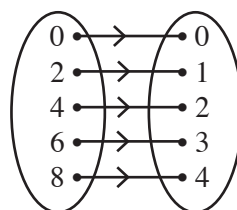
b. $\frac{x + 39}{x^2 - x - 12}$

c. $\frac{x - 39}{x^2 - x + 12}$

d. $\frac{x + 39}{x^2 + x - 12}$

6. Perhatikan diagram panah berikut.

Dari gambar tersebut yang merupakan range adalah ....

a. {1, 2, 3, 4, 5}
b. {a, b, c, d}
c. {1, 2, 3, 5}
d. {a, b, d}

7. Relasi himpunan P ke himpunan Q pada diagram panah di bawah ini adalah ....

a. setengah dari
b. dua kali dari
c. lebih dua dari
d. kurang dua dari

8. Diketahui fungsi $f(x) = 3x – 5$ nilai $f(2)$ adalah ....

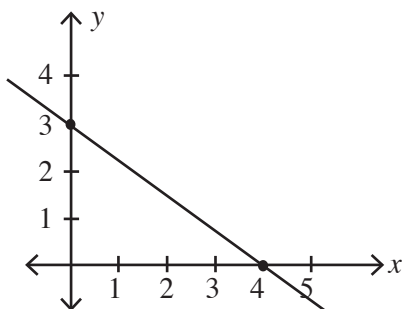
a. 0
b. 1
c. 2
d. 3

9. Fungsi f didenifisikan oleh $f(x) = x^2 - x + 2$. Jika diketahui domain $D = \{0, 1, 2\}$ maka range (daerah hasil) fungsi tersebut adalah ....

a. {2, 0, 4}
b. {2, 2, 4}
c. {2, 4}
d. {2, 4, 0}

10. Diketahui sebuah fungsi f dinyatakan sebagai $f(x) = x^2 - 5$. Jika nilai $f(a) = 4$ maka nilai a yang memenuhi adalah ....

a. –2 atau 2
b. –3 atau 3
c. –4 atau 4
d. –5 atau 5

11. Perhatikan gambar berikut.

Persamaan garis pada bidang koordinat tersebut adalah ....

a. $x + y = 3$
b. $x + y = 4$
c. $4x + 3y = 12$
d. $3x + 4y = 12$

12. Sebuah garis memiliki persamaan $4x + y - 5 = 0$.
Gradien garis tersebut adalah ....

a. 4
b. –4
c. $\frac{1}{4}$
d. $-\frac{1}{4}$

13. Gradien sebuah garis yang melalui titik (1, 1) dan (4, 4) adalah...

a. 0
b. $\frac{1}{2}$
c. $\frac{1}{4}$
d. 1

14. Garis p memiliki gradien 3. Jika garis q letaknya tegak lurus dengan garis p maka gradien garis q adalah ....

a. $\frac{1}{3}$
b. –3
c. $-\frac{1}{3}$
d. –1

15. Persamaan garis yang melalui titik (–3, 2) dan memiliki gradien 2 adalah ....

a. $2x - y - 4 = 0$
b. $2x - y - 6 = 0$
c. $2x + y - 4 = 0$
d. $2x + y - 6 = 0$

16. Nilai x yang memenuhi persamaan $4x - 5 = x + 4$ adalah ....

a. 2
b. 3
c. 4
d. 5

17. Himpunan penyelesaian dari persamaan $4x + y = 6$ dengan $x, y \in$ bilangan asli adalah ....

a. {(1, 3)}
b. {(1, 2), (2, –2)}
c. {(0, 6), (1, 2)}
d. {(1, 2)}

18. Nilai x yang memenuhi SPLDV:

$2x - 3y = 5$

$x + 4y = -3$

adalah ....

a. –1
b. 0
c. 1
d. 2

19. Himpunan penyelesaian SPLDV:

$x - 4y = 6$

$3x - y = 7$

adalah ...

a. {(2, 1)}
b. {(-2, 1)}
c. {(1, -2)}
d. {(-1, 2)}

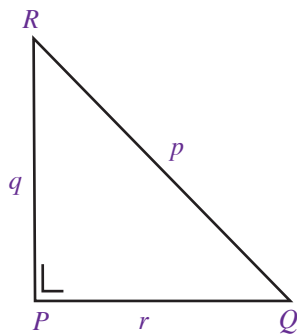
20. Koordinat titik potong sumbu x dan sumbu y dari persamaan garis $4x - y + 12 = 0$ adalah ....

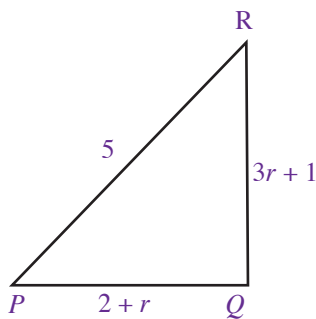
a. (3, 0) dan (0, 12)
b. (0, 3) dan (12, 0)
c. (–3, 0) dan (0, –12)
d. (–3, 0) dan (0, 12)

21. Harga 1 kg mentega dan 1 kg gula pasir adalah Rp5.600,00 sedangkan harga 2 kg mentega dan 3 kg gula pasir adalah Rp13.600,00 harga satuan 1 kg mentega adalah ....

a. Rp2.400,00
b. Rp3.200,00
c. Rp4.600,00
d. Rp7.800,00

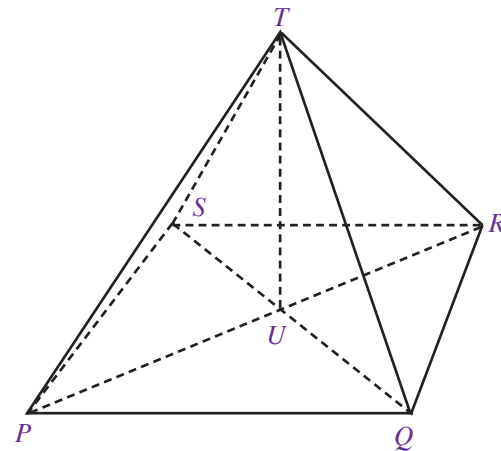
22. Jumlah umur kakak dan umur adik adalah 37 tahun, Jika selisih umur mereka 3 tahun maka umur adik adalah ...
a. 20 tahun
b. 19 tahun
c. 18 tahun
d. 17 tahun

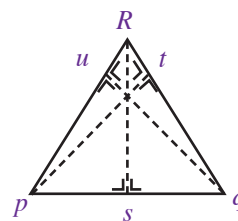
23. Perhatikan gambar berikut.

Dalam teorema Pythagoras berlaku hubungan ....
a. $r^2 = q^2 - p^2$
b. $q^2 = p^2 + r^2$
c. $r^2 = p^2 - q^2$
d. $q^2 = r^2 - p^2$

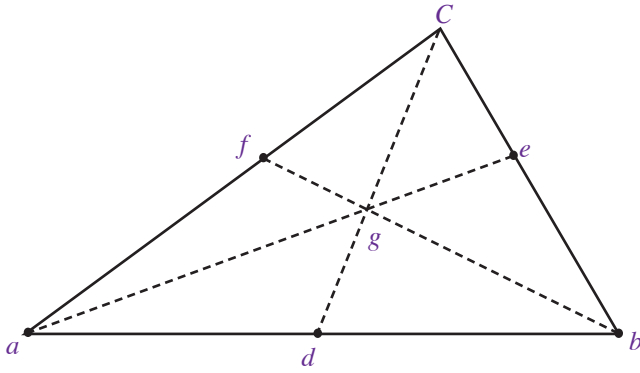
24. Perhatikan gambar berikut nilai *r* yang memenuhi segitiga *PQR* adalah ....

a. 1
b. 2
c. 3
d. 4

25. Keliling sebuah segitiga yang memiliki panjang sisi miring 10 cm dan tinggi 6 cm adalah ....
a. 16 cm
b. 20 cm
c. 24 cm
d. 30 cm

26. Luas sebuah persegi adalah 100 cm^2, panjang diagonal persegi tersebut adalah ....
a. $2\sqrt{10}$ cm
b. $\sqrt{20}$ cm
c. $10\sqrt{2}$ cm
d. $\sqrt{200}$ cm

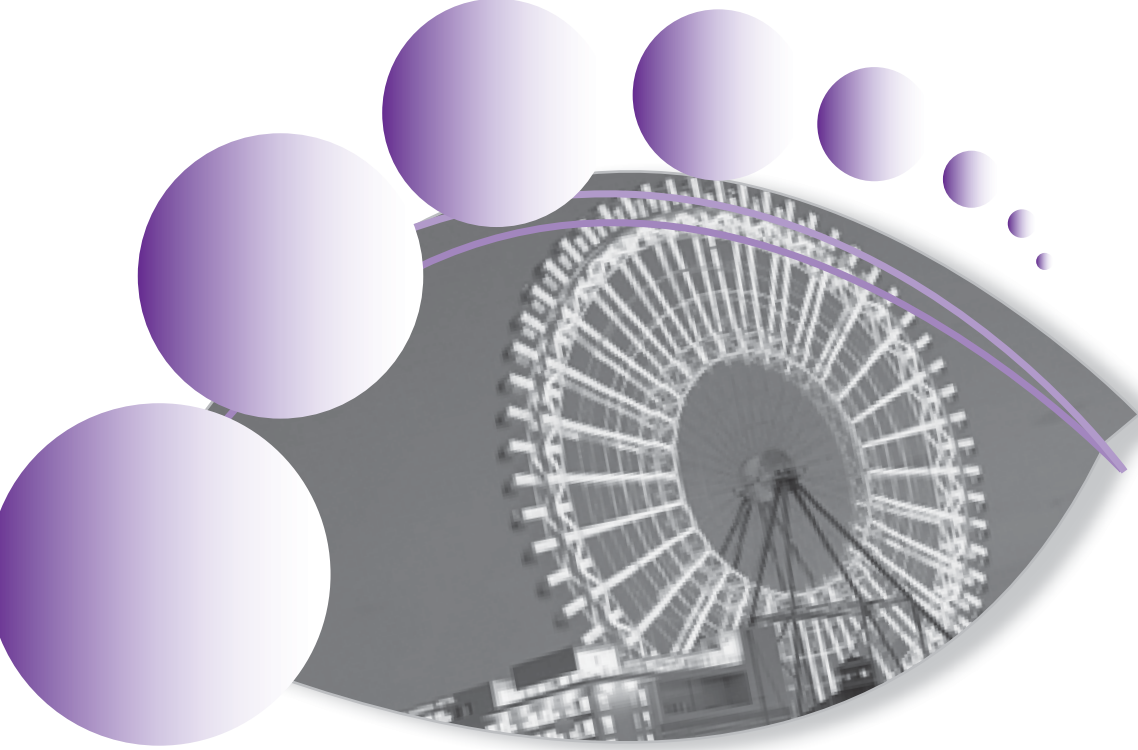
27. Perhatikan gambar berikut.

Dari gambar tersebut Jika *PQ* = 8 cm, *QR* = 6 cm dan *PT* = 13 cm, maka tinggi limas tersebut adalah ....
a. 10 cm
b. 11 cm
c. 12 cm
d. 13 cm

28. Perhatikan gambar berikut

Dari gambar tersebut yang merupakan proyeksi garis *PR* terhadap *QR* adalah ....
a. *RT*
b. *QT*
c. *UR*
d. *UP*

29. Perhatikan gambar berikut

Dari gambar tersebut, jika panjang AB = 10 cm, BC = 6 cm, dan AC = 8 cm maka panjang garis berat AE adalah ....

a. $\sqrt{72}$
b. $\sqrt{73}$
c. $\sqrt{74}$
d. $\sqrt{75}$

30. Perhatikan kembali segitiga ABC pada soal nomor 29 panjang garis GE adalah ....

a. $\frac{1}{3}\sqrt{73}$
b. $\frac{2}{3}\sqrt{73}$
c. $\frac{1}{3}\sqrt{72}$
d. $\frac{2}{3}\sqrt{72}$

Sumber: *Dokumentasi Penulis*

Bab 6

Lingkaran

Pernahkah kamu berekreasi ke Dunia Fantasi? Di tempat tersebut, kamu dapat menikmati berbagai macam permainan yang unik dan menarik. Mulai dari Halilintar, Ontang-Anting, Kora-Kora, sampai Arung Jeram. Salah satu permainan yang tidak boleh dilewatkan adalah Bianglala. Dalam permainan ini, kamu dapat melihat suatu tempat dari ketinggian tertentu. Jika diperhatikan secara saksama, bentuk dasar dari permainan ini adalah berupa lingkaran. Tahukah kamu, apa yang dimaksud dengan lingkaran?

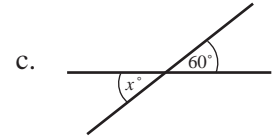
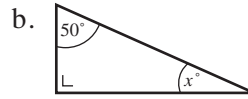
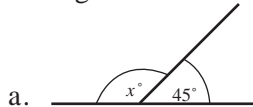
Setelah mempelajari bangun datar segitiga dan segiempat di Kelas VII, kamu akan mempelajari bangun datar yang lain, yaitu lingkaran. Pada bab ini, kamu akan mempelajari tentang lingkaran beserta unsur-unsurnya, perhitungan luas dan keliling lingkaran, sampai dengan pengukuran sudut pusat dan sudut keliling pada lingkaran.

Uji Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari materi pada bab ini, kerjakan soal-soal berikut.

1. Sebutkan lima macam benda yang berbentuk lingkaran.
2. Hitunglah:
   a. $\frac{22}{7}$ c. $3{,}14 \times 14$
   b. $\frac{22}{7} \times 14$
3. Buatlah sudut yang memiliki ukuran:
   a. 30º c. 90º
   b. 60º
4. Hitunglah nilai *x*.
   a.

   b.

   c.

5. Sederhanakanlah.
   a. $\frac{30^\circ}{360^\circ}$ c. $\frac{45^\circ}{360^\circ}$
   b. $\frac{60^\circ}{360^\circ}$

A. Lingkaran dan Unsur-Unsurnya

1. Pengertian Lingkaran

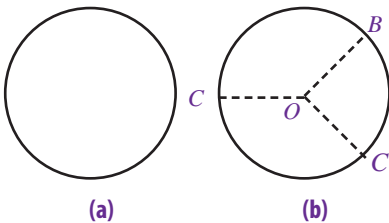
Coba kamu perhatikan Gambar 6.1secara seksama.

Gambar 6.1 : Memperlihatkan
(a) Jam dinding
(b) Ban Mobil
(c) Uang Logam

(a)

(b)

(c)

Gambar 6.1 : Bentuk Lingkaran

Gambar 6.2 : Memperlihatkan
(a) Bentuk geometri benda-benda pada Gambar 6.1
(b) Lingkaran

Jam dinding, ban mobil, dan uang logam pada Gambar 6.1 merupakan contoh benda-benda yang memiliki bentuk dasar lingkaran. Secara geometris, benda-benda tersebut dapat digambarkan seperti pada Gambar 6.2(a) .

Perhatikan Gambar 6.2(b) dengan saksama. Misalkan *A*, *B*, *C* merupakan tiga titik sebarang pada lingkaran yang berpusat di *O*. Dapat dilihat bahwa ketiga titik tersebut memiliki jarak yang sama terhadap titik *O*. Dengan demikian, lingkaran adalah kumpulan titik-titik yang membentuk lengkungan tertutup, di mana titik-titik pada lengkungan tersebut berjarak sama terhadap suatu titik tertentu. Titik tertentu itu disebut sebagai **titik pusat lingkaran** Pada Gambar 6.2(b) , jarak *OA*, *OB*, dan *OC* disebut **jari-jari lingkaran**

2. Unsur-Unsur Lingkaran

Ada beberapa bagian lingkaran yang termasuk dalam unsur-unsur sebuah lingkaran di antaranya titik pusat, jari-jari, diameter, busur, tali busur, tembereng, juring, dan apotema. Untuk lebih jelasnya, perhatikan uraian berikut.

a. Titik Pusat

Titik pusat lingkaran adalah titik yang terletak di tengah-tengah lingkaran. Pada Gambar 6.3 , titik *O* merupakan titik pusat lingkaran, dengan demikian, lingkaran tersebut dinamakan lingkaran *O*.

Gambar 6.3 : Lingkaran yang berpusat di titik O.

b. Jari-Jari (*r*)

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, jari-jari lingkaran adalah garis dari titik pusat lingkaran ke lengkungan lingkaran. Pada Gambar 6.3 , jari-jari lingkaran ditunjukkan oleh garis *OA*, *OB*, dan *OC*.

c. Diameter (*d*)

Diameter adalah garis lurus yang menghubungkan dua titik pada lengkungan lingkaran dan melalui titik pusat. Garis *AB* pada lingkaran *O* merupakan diameter lingkaran tersebut. Perhatikan bahwa $AB = AO + OB$. Dengan kata lain, nilai diameter merupakan dua kali nilai jari-jarinya, ditulis bahwa $d = 2r$.

d. Busur

Dalam lingkaran, busur lingkaran merupakan garis lengkung yang terletak pada lengkungan lingkaran dan menghubungkan dua titik sebarang di lengkungan tersebut. Pada Gambar 6.3 , garis lengkung *AC* (ditulis $\overset{\frown}{AC}$), garis lengkung *CB* (ditulis $\overset{\frown}{CB}$), dan garis lengkung *AB* (ditulis $\overset{\frown}{AB}$) merupakan busur lingkaran *O*.

e. Tali Busur

Tali busur lingkaran adalah garis lurus dalam lingkaran yang menghubungkan dua titik pada lengkungan lingkaran. Berbeda dengan diameter, tali busur tidak melalui titik pusat lingkaran *O*. Tali busur lingkaran tersebut ditunjukkan oleh garis lurus *AC* yang tidak melalui titik pusat pada Gambar 6.3.

f. Tembereng

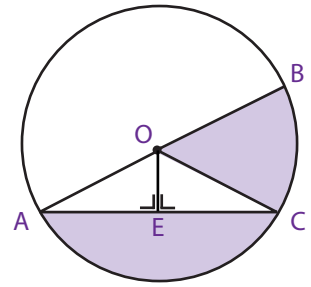
Tembereng adalah luas daerah dalam lingkaran yang dibatasi oleh busur dan tali busur. Pada Gambar 6.3 , tembereng ditunjukkan oleh daerah yang diarsir dan dibatasi oleh busur *AC* dan tali busur *AC*.

g. Juring

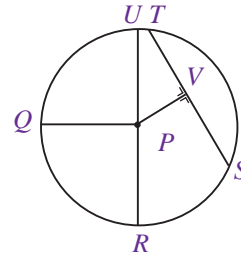
Juring lingkaran adalah luas daerah dalam lingkaran yang dibatasi oleh dua buah jari-jari lingkaran dan sebuah busur yang diapit oleh kedua jari-jari lingkaran tersebut. Pada Gambar 6.3 , juring lingkaran ditunjukkan oleh daerah yang diarsir yang dibatasi oleh jari-jari *OC* dan *OB* serta busur *BC*, dinamakan juring *BOC*.

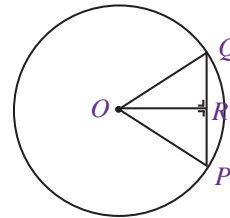
h. Apotema

Pada sebuah lingkaran, apotema merupakan garis yang menghubungkan titik pusat lingkaran dengan tali busur lingkaran tersebut. Garis yang dibentuk bersifat tegak lurus dengan tali busur. Coba perhatikan Gambar 6.3 secara seksama. Garis *OE* merupakan garis apotema pada lingkaran *O*.

Agar kamu lebih memahami materi tentang pengertian dan unsur-unsur lingkaran, coba pelajari Contoh Soal 6.1 berikut ini.

Contoh Soal 6.1

1. Perhatikan gambar lingkaran berikut. Dari gambar tersebut, tentukan:

   a. titik pusat, e. tali busur,
   b. jari-jari, f. tembereng,
   c. diameter, g. juring,
   d. busur, h. apotema.

2. Perhatikan gambar lingkaran berikut. Jika jari-jari lingkaran tersebut adalah 10 cm dan panjang tali busurnya 16 cm, tentukan:

   a. diameter lingkaran,
   b. panjang garis apotema.

Jawab :

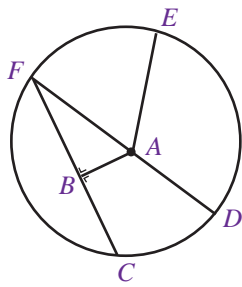
1. a. Titik pusat = titik *O*
   b. Jari-jari = garis *PU*, *PQ*, dan *PR*
   c. Diameter = garis *RU*
   d. Busur = garis lengkung *QR*, *RS*, *ST*, *TU*, dan *UQ*
   e. Tali busur = garis *ST*
   f. Tembereng = daerah yang dibatasi oleh busur *ST* dan tali busur *ST*
   g. Juring = *QPU*, *QPR*, dan *RPU*
   h. Apotema = garis *PV*
2. a. Diameter $= 2 \times$ jari-jari
   $= 2 \times (10)$
   $= 20$
   Jadi, diameter lingkaran tersebut adalah 20 cm.
   b. Perhatikan segitiga *OQR*. Panjang *OQ* = 10 cm dan *QR* = 8 cm.
   Menurut Teorema Pythagoras :

$$OR^2 = OQ^2 - QR^2 \text{ maka } OR = \sqrt{OQ^2 - RQ^2}$$
$$= \sqrt{(10)^2 - (8)^2}$$
$$= \sqrt{100^2 - 64^2}$$
$$= \sqrt{36\,\text{cm}^2}$$
$$= 6 \text{ cm}$$

Jadi, panjang garis apotema lingkaran tersebut adalah 6 cm

Uji Kompetensi 6.1

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Perhatikan gambar lingkaran berikut.

Dari gambar tersebut, tentukan:

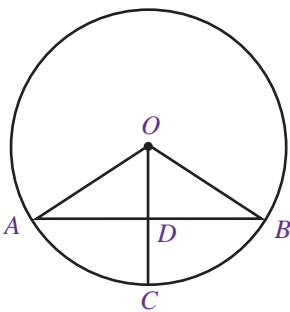
a. titik pusat,
b. jari-jari,
c. diameter,
d. busur,
e. tali busur,
f. tembereng,
g. juring,
h. apotema.

2. Apa yang dimaksud dengan:

a. busur,
b. tali busur,
c. tembereng,
d. apotema,
e. juring.

3. Gambarkan lingkaran-lingkaran yang memiliki panjang:

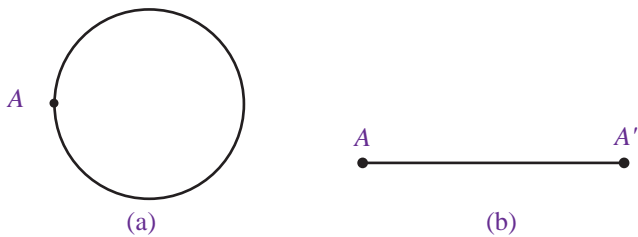
a. jari-jari 3 cm,
b. diameter 5 cm,
c. jari-jari 4 cm dan tembereng dengan panjang tali busur 6 cm.

4. Sebuah lingkaran dengan jari-jari 5 cm memiliki panjang tali busur 8 cm. Tentukan panjang garis apotema pada lingkaran tersebut.
5. Perhatikan gambar lingkaran O berikut.

Jika panjang jari-jari lingkaran tersebut 13 cm dan panjang tali busur AB adalah 24 cm, tentukanlah panjang:

a. diameter lingkaran,
b. garis apotema OD,
c. garis CD

B. Keliling dan Luas Lingkaran

1. Keliling Lingkaran

Coba kamu amati Gambar 6.4 secara seksama.

Gambar 6.4 : Diameter Lingkaran

Gambar 6.4 : memperlihatkan Garis lurus AA' sebagai diameter lingkaran.

Gambar 6.4(a) menunjukkan sebuah lingkaran dengan titik *A* terletak di sebarang lengkungan lingkaran. Jika lingkaran tersebut dipotong di titik *A*, kemudian direbahkan, hasilnya adalah sebuah garis lurus *AA*' seperti pada gambar Gambar 6.4(b) . Panjang garis lurus tersebut merupakan keliling lingkaran. Jadi, keliling lingkaran adalah panjang lengkungan pembentuk lingkaran tersebut. Bagaimana menghitung keliling lingkaran? Misalkan, diketahui sebuah lingkaran yang terbuat dari kawat. Keliling tersebut dapat dihitung dengan mengukur panjang kawat yang membentuk lingkaran

Plus +

Bilangan π disebut bilangan transedental, yaitu bilangan yang tidak akan pernah bisa dituliskan nilainya secara pasti dan tidak bisa dicari lewat penyelesaian suatu persamaan matematis maupun teka-teki geometris

tersebut. Selain dengan cara di atas, keliling sebuah lingkaran dapat juga ditentukan menggunakan rumus. Akan tetapi, rumus ini bergabung pada sebuah nilai, yaitu π (dibaca phi). Berapakah nilai π? Untuk mengetahuinya, lakukan kegiatan berikut dengan kelompok belajarmu.

Kegiatan 6.1

1. Siapkan bahan-bahan seperti kertas, jangka, benang kasur, dan penggaris.
2. Dengan menggunakan jangka, buatlah lima lingkaran dengan panjang diameter yang berbeda-beda.
3. Kemudian, hitunglah keliling setiap lingkaran yang telah kamu buat. Caranya dengan mengimpitkan benang kasur pada setiap lingkaran tadi.
4. Ukurlah panjang benang kasur tadi.
5. Catat hasilnya pada tabel berikut.

No	Panjang Diameter	Keliling	$\frac{\text{Keliling}}{\text{Diameter}}$
1	...	...	...
2	...	...	...
3	...	...	...
4	...	...	...
5	...	...	...

Dari tabel tersebut, apa yang kamu peroleh dari nilai perbandingan antara keliling dan diameter? Apa yang dapat kamu simpulkan?

Jika kamu melakukan Kegiatan 6.1 dengan teliti, kamu akan memperoleh nilai yang sama untuk perbandingan keliling dan diameter pada setiap lingkaran. Nilai tersebut adalah 3,141592.... Inilah yang dimaksud dengan nilai π (phi). Jika dibulatkan dengan pendekatan, diperoleh π = 3,14. Oleh karena $\frac{22}{7}$ = 3,14 maka nilai π juga dapat dinyatakan dengan $\pi = \frac{22}{7}$.

Dari hasil kegiatan tersebut, diketahui bahwa $\pi = \frac{K}{d}$ sehingga keliling lingkaran dapat dinyatakan dengan rumus sebagai berikut.

$$K = \pi \cdot d$$

Dengan K = keliling lingkaran,

π = 3,14 atau $\frac{22}{7}$,

d = diameter lingkaran.

Oleh karena panjang diameter adalah dua kali panjang jari-jari maka $K = \pi \cdot d = \pi\ (2 \cdot r)$ sehingga

$$K = 2\ \pi r$$

Untuk lebih jelasnya, coba kamu pelajari Contoh Soal 6.2 dan Contoh Soal 6.3 berikut.

Contoh Soal 6.2

1. Sebuah lingkaran memiliki panjang diameter 35 cm. Tentukanlah:
   a. panjang jari-jari,
   b. keliling lingkaran.
2. Panjang jari-jari sepeda adalah 50 cm. Tentukanlah:
   a. diameter ban sepeda tersebut,
   b. keliling ban sepeda tersebut.
3. Sebuah lapangan berbentuk lingkaran memiliki 88 m, tentukanlah:
   a. diameter lapangan tersebut,
   b. jari-jari lapangan tersebut.

Jawab :

1. Diketahui d = 35 cm
   a. $d = 2 \cdot r$ maka 35 cm = $2 \cdot r$
   $$r = \frac{35}{2}$$
   $$r = 17,5$$
   Jadi, panjang jari-jarinya adalah 17,5 cm.
   b. $K = \pi \cdot d$ maka $K = \frac{22}{7} \times 35$ cm
   $= 22 \times 5$ cm
   $= 110$ cm
   Jadi, panjang diameternya adalah 110 cm.
2. Diketahui r = 50 cm
   a. $d = 2 \cdot r$ maka $d = 2 \cdot (50) = 100$
   Jadi, panjang diameternya adalah 100 cm.
   b. $K = \pi \cdot d$ maka k = 3,14 × 100 cm = 314 cm
   Jadi, panjang kelilingnya adalah 314 cm.
3. Diketahui K = 88 cm
   a. $K = \pi \cdot d$ maka 88 cm $= \frac{22}{7} \times d$
   $$d = \frac{22}{7} \times 88 = 7 \times 4 = 28$$
   Jadi, panjang diameternya adalah 28 cm.
   b. $d = 2 \cdot r$ maka 28 cm = $2 \times r$
   $$r = \frac{28 \text{ cm}}{2}$$
   $$r = 14 \text{ cm}$$
   Jadi, panjang jari-jarinya adalah 14 cm

Seiring tumbuhnya sebuah pohon setiap tahunnya, batang pohon tersebut membesar dalam lingkaran-lingkaran yang memusat (konsentris). Lapisan-lapisan yang berurutan ini, yang dinamakan cincin-cincin pertumbuhan, berbeda-beda lebarnya tergantung pada keadaan cuaca selama tahun tertentu. Keliling batang itu rata-rata bertambah 2,5 cm setiap tahunnya. Dengan demikian, kamu dapat mengetahui usia suatu pohon tanpa perlu menebangnya dan tanpa perlu menggunakan π. Ukurlah keliling batang pohon tersebut dalam satuan sentimeter pada tempat yang tidak ada akar tumbuh?, kemudian bagi dengan 2,5. Beberapa pohon tidak mengikuti ketentuan ini, contohnya pohon palem.

Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia.*

Contoh Soal 6.3

1. Perhatikan gambar di samping. Sebuah persegi terletak tepat di dalam sebuah lingkaran. Jika persegi tersebut memiliki panjang sisi 14 cm, tentukanlah:
   a. diameter lingkaran,
   b. jari-jari lingkaran,
   c. keliling lingkaran.

2. Sebuah ban mobil memiliki panjang jari-jari 30 cm. Ketika mobil tersebut berjalan, ban mobil tersebut berputar sebanyak 100 kali. Tentukan:

a. diameter ban mobil,
b. keliling ban mobil,
c. jarak yang ditempuh mobil.

Jawab :

1. Perhatikan segitiga ABC pada gambar. Panjang AC merupakan diagonal lingkaran, sedangkan panjang AO merupakan jari-jari lingkaran.

   a. Menurut teorema Pythagoras,

   $AC^2 = AB^2 + BC^2$ maka $AC^2 = 14^2 + 14^2$
   $= 196 + 196$
   $= 2 \times 196$
   $AC = \sqrt{2 \times 196}$
   $= 14\sqrt{2}$ cm

   Jadi, diameter lingkaran tersebut adalah $14\sqrt{2}$ cm.

   b. Panjang jari-jari lingkaran adalah setengah panjang diameter lingkaran sehingga:

   $AO = \frac{1}{2}\,AC$ maka $AO = \frac{1}{2} \times 14\sqrt{2}$
   $= 7\sqrt{2}$

   Jadi, panjang jari-jari lingkaran tersebut adalah $7\sqrt{2}$ cm.

   c. Untuk mencari keliling lingkaran

   $K = \pi \cdot d$ maka $K = \frac{22}{7} \times 14\sqrt{2}$ cm
   $= 22 \times 2\sqrt{2}$ cm
   $= 44\sqrt{2}$ cm

   Jadi, keliling lingkaran tersebut adalah $44\sqrt{2}$ cm.

2. a. Panjang diameter lingkaran adalah dua kali panjang jari-jarinya sehingga:

   $d = 2 \times r$ maka $d = 2 \times (30$ cm$)$
   $= 60$ cm

   Jadi, panjang diameter ban mobil tersebut adalah 60 cm.

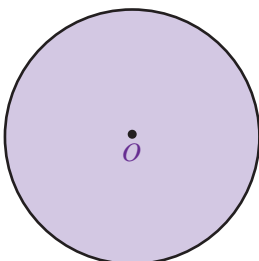
   b. Untuk mencari keliling lingkaran:

   $K = \pi \times d$ maka $K = 3{,}14 \times 60$ cm
   $K = 188{,}4$ cm

   Jadi, keliling ban mobil tersebut adalah 188,4 cm.

   c. Jarak yang ditempuh ketika ban mobil berputar 100 kali adalah

   Jarak = keliling × banyak putaran
   = 188,4 × 100
   = 18.840

   Jadi, jarak yang ditempuh ketika ban mobil berputar 100 kali adalah 18.840 cm atau 188,4 m

2. Luas Lingkaran

Luas lingkaran merupakan luas daerah yang dibatasi oleh keliling lingkaran. Coba kamu perhatikan Gambar 6.5 . Daerah yang diarsir merupakan daerah lingkaran.

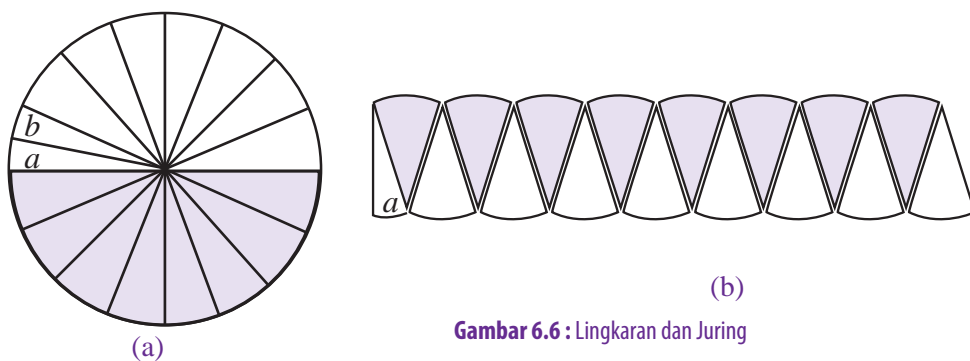
Gambar 6.5 : Lingkaran

Sekarang, bagaimana menghitung luas sebuah lingkaran?

Luas lingkaran dapat dihitung menggunakan rumus umum luas lingkaran. Perhatikan uraian berikut. Misalkan, diketahui sebuah lingkaran yang dibagi menjadi 16 buah juring yang sama bentuk dan ukurannya. Kemudian, salah satu juringnya dibagi dua lagi sama besar. Potongan-potongan tersebut disusun

sedemikian sehingga membentuk persegipanjang. Coba kamu amati Gambar 6.6 berikut ini.

(a)

(b)

Gambar 6.6 : Lingkaran dan Juring

Jika kamu amati dengan teliti, susunan potongan-potongan juring tersebut menyerupai persegipanjang dengan ukuran panjang mendekati setengah keliling lingkaran dan lebar r sehingga luas bangun tersebut adalah

$$\begin{aligned}\text{Luas persegipanjang} &= p \times l \\ &= \frac{1}{2} \text{ keliling lingkaran} \times r \\ &= \frac{1}{2} \times (2\pi r) \times r \\ &= \pi \times r^2\end{aligned}$$

Jadi, luas daerah lingkaran tersebut dinyatakan dengan rumus sebagai berikut.

$$\text{Luas lingkaran} = \pi r^2$$

Jadi, diperoleh luas persegipanjang tersebut : L = Panjang × Lebar

$$\begin{aligned} &= \pi \times r \times r \\ &= \pi \times r^2\end{aligned}$$

Dengan demikian, luas daerah lingkaran tersebut dapat dirumuskan:

$$L = \pi r^2 \text{ atau } L = \frac{1}{4}\pi d^2$$

Untuk lebih jelasnya, coba kamu perhatikan contoh-contoh soal berikut.

Contoh Soal 6.4

1. Sebuah lingkaran memiliki diameter 14 cm. Tentukan:
   a. jari-jari lingkaran,
   b. luas lingkaran.
2. Jari-jari sebuah lingkaran adalah 28 cm. Tentukan:
   a. diameter lingkaran,
   b. luas lingkaran.
3. Luas sebuah lingkaran adalah 1.386 cm^2. Tentukan:
   a. jari-jari lingkaran,
   b. diameter lingkaran.

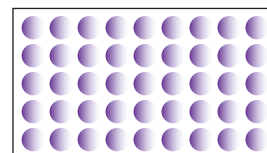
Jawab :

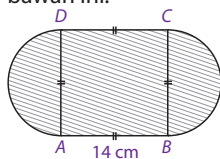
1. Diketahui d = 14 cm.
   a. Panjang jari-jari lingkaran adalah setengah kali panjang diameternya.

$$\begin{aligned} d = 2 \cdot r \text{ maka } r &= \frac{1}{2} \times d \\ &= \frac{1}{2} \times (14 \text{ cm}) \\ &= 7 \text{ cm}\end{aligned}$$

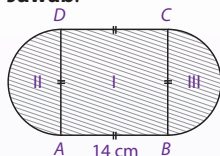
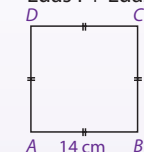
   Jadi, jari-jari lingkarn tersebut adalah 7 cm.

Problematika

Perhatikan gambar berikut

Jumlah lingkaran pada kotak tersebut adalah 45 buah. Dapatkah kamu memasukkan 1 buah lingkaran lagi? Bagaimana susunannya

Perhatikan gambar di bawah ini.

Luas daerah yang diarsir adalah ....

a. 249 cm² **c.** 350 cm²
b. 273 cm² **d.** 392 cm²

Jawab:

Luas daerah yang diarsir
= Luas I + Luas II + Luas III

Luas I = Luas persegi *ABCD*
= *AB* × *CD*
= (14 × 14) cm
= 196 cm²

Luas II + Luas III
= Luas lingkaran berdiameter 14 cm
= πr^2
= $\frac{22}{7}$ (7 7) cm
= 154 cm²
Luas daerah yang diarsir
= 196 cm² + 154 cm²
= 350 cm²

Jawaban: c

Soal UNAS, 2006

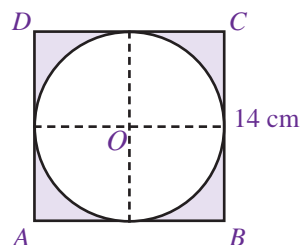
b. Untuk mencari luas lingkaran:

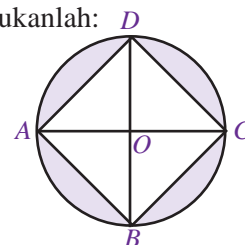
$L = \pi \cdot r^2$ maka: $L = \frac{22}{7} \cdot (7)^2$
$= \frac{22}{7} \cdot 7 \cdot$
$= 22 \cdot 1 \cdot 7$
$= 154^2$

Jadi, luas lingkaran tersebut adalah 154 cm².

2. Diketahui r = 28 cm.
   a. Panjang diameter adalah dua kali panjang jari-jarinya. Jadi,
   $d = 2 \cdot r$ maka $d = 2(28)$
   $= 56$
   Jadi, panjang diameter kingkaran tersebut adalah 56 cm.
   b. Untuk mencari luas lingkaran:
   $L = \pi \cdot r^2$ maka $L = \frac{22}{7} \times (28)^2$
   $= \frac{22}{7} \times 28 \times 28$
   $= 22 \times 4 \times 28$
   $= 2.464$ cm².
   Jadi, luas lingkaran tersebut 2.464 cm².
3. Diketahui L = 1.386 cm².
   a. $L = \pi . r^2$ maka: 1.386 cm² $= \frac{22}{7} \times r^2$
   $r^2 = \frac{7}{22} \times 1.386^2$
   $r^2 = 7 \times 63^2$
   $r^2 = 441^2$
   $r = \sqrt{441}$
   $r = 21$
   Jadi, jari-jari lingkaran tersebut adalah 21 cm.
   b. Panjang diameter lingkaran adalah dua kali panjang jari-jarinya. Jadi,
   $d = 2 \cdot r$ maka $d = 2 \cdot (21 \text{ cm})$
   $= 42$ cm

Contoh Soal 6.5

1. Perhatikan gambar. Sebuah lingkaran tepat berada di dalam persegi. Jika ukuran rusuk persegi tersebut adalah 14 cm, tentukanlah:
   a. luas persegi,
   b. luas lingkaran,
   c. luas daerah yang diarsir.

2. Perhatikan gambar berikut. Sebuah persegi terletak tepat berada di dalam lingkaran. Jika keliling persegi tersebut adalah 56 cm, tentukanlah:
   a. panjang sisi persegi,
   b. luas persegi panjang,
   c. diameter lingkaran,
   d. jari-jari lingkaran,
   e. luas lingkaran,
   f. luas daerah yang diarsir.

D
A
O
C
B

Jawab :

1. a. Luas persegi = sisi × sisi
$= 14 \times 14$
$= 196^2$
Jadi, luas persegi tersebut adalah 196 cm^2.

b. Luas lingkaran = $\pi \times r^2$
$= \frac{22}{7} \times (7)^2 = \frac{22}{7} \times 7 \times 7$
$= 22 \times 7 = 154$
Jadi, luas lingkaran tersebut adalah 154 cm^2.

c. Luas daerah yang diarsir = Luas persegi – Luas lingkaran
$= 196 - 154$
$= 42$
Jadi, luas daerah yang diarsiradalah 42 cm^2.

2. a. Untuk menentukan panjang sisi persegi, gunakan rumus keliling persegi sebagai berikut.
Keliling = 4 × sisi maka 56 cm = 4 × sisi
$\text{sisi} = \frac{56}{4}$
$\text{sisi} = 14$
Jadi, panjang sisi persegi tersebut adalah 14 cm.

b. Luas persegi = sisi × sisi
$= 14 \times 14$
$= 196^2$
Jadi, luas persegi tersebut adalah 196 cm^2.

c. Diameter lingkaran adalah diagonal dari persegi *ABCD*. Perhatikan segitiga AB pada segitiga *ABCD*. Menurut teorema Pythagoras,
$BD^2 = AB^2 + AD^2$ maka $BD^2 = (14)^2 + (14)^2$
$= 196^2 + 196^2$
$= 2 \times 196^2$
$BD = \sqrt{2 \times 196}$
$= 14\sqrt{2}$
Jadi, diameter lingkarannya adalah $14\sqrt{2}$ cm.

d. Panjang jari-jari lingkaran adalah setengah kali diagonalnya. Pada gambar terlihat bahwa panjang BO adalah setengah kali panjang BD.
$BO = \frac{1}{2} BD$ maka $BO = \frac{1}{2}(14\sqrt{2})$
$= 7\sqrt{2}$
Jadi, diameter lingkarannya adalah $7\sqrt{2}$

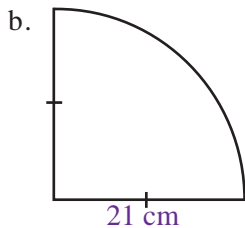
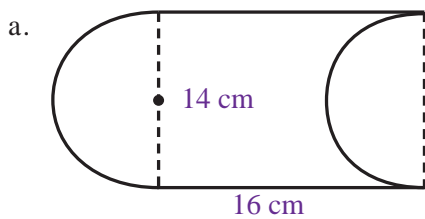
e. $L = \pi \times r^2$ maka: $L = \frac{22}{7} \times (7\sqrt{2})^2$
$L = \frac{22}{7} \times (7\sqrt{2}) \times (7\sqrt{2})$
$L = 22 \times \sqrt{2} \times 7\sqrt{2}$
$L = 22 \times 14^2$
$L = 308$
Jadi, luas lingkarannya adalah 308 cm^2.

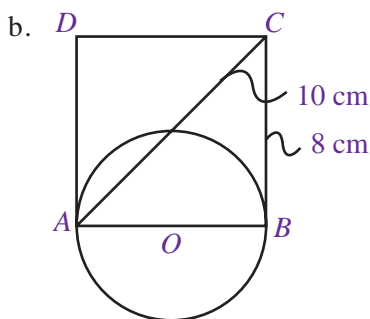
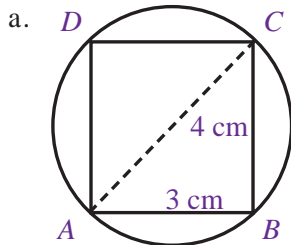
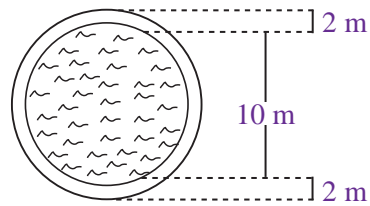
f. Luas daerah yang diarsir = luas lingkaran – luas persegi
$= 308 - 196$
$= 112$
Jadi, luas daerah yang diarsir adalah 112 cm^2

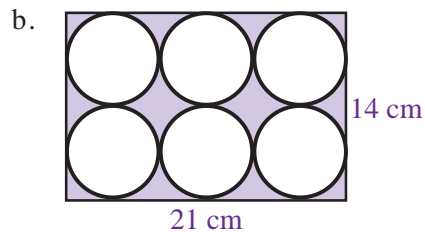
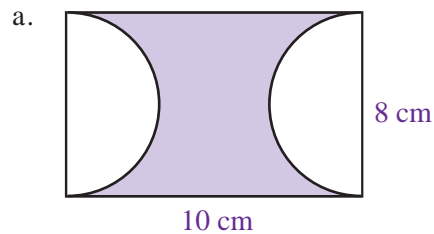
Uji Kompetensi 6.2

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Hitunglah keliling lingkaran jika diketahui ukuran jari-jarinya adalah :
   a. 3 cm c. 5 cm e. 7 cm
   b. 4 cm d. 6 cm
2. Hitunglah keliling lingkaran jika diketahui ukuran diameternya sebagai berikut.
   a. 10 cm c. 12 cm e. 14 cm
   b. 11 cm d. 13 cm
3. Keliling sebuah taman berbentuk lingkaran adalah 220 m. Tentukan:
   a. jarak terjauh kedua ujung taman,
   b. jarak dari titik tengah taman ke ujung taman.
4. Hitunglah keliling dari setiap bangun datar berikut.
   a.

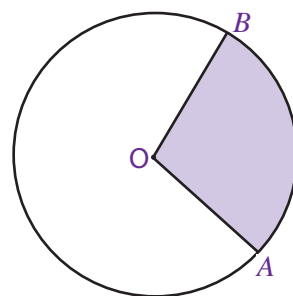
   b.

5. Hitunglah keliling lingkaran kedua bangun berikut.
   a.

   b.

6. Hitunglah luas lingkaran jika diketahui ukuran jari-jarinya adalah sebagai berikut.
   a. 5 cm c. 10 cm e. 20 cm
   b. 7 cm d. 14 cm
7. Hitunglah luas lingkaran jika diketahui ukuran diameternya adalah sebagai berikut.
   a. 10 cm c. 14 cm e. 18 cm
   b. 12 cm d. 16 cm
8. Luas suatu kebun yang berbentuk lingkaran adalah 2.464 m^2. Hitunglah:
   a. jarak terjauh kedua ujung kebun tersebut,
   b. jarak dari titik kebun ke ujung lapangan,
   c. keliling lapangan tersebut.
9. Perhatikan gambar berikut.

   Sebuah kolam yang berbentuk lingkaran memiliki diameter 10 m. Di tepi kolam terdapat jalan dengan lebar 2 m. Tentukan:
   a. luas kolam tersebut,
   b. luas jalan di tepi kolam tersebut.
10. Hitunglah luas daerah yang diarsir berikut ini.
   a.

   b.

C. Busur, Juring, dan Tembereng

Pada subbab sebelumnya, kamu telah mempelajari pengertian busur, juring, dan tembereng. Sekarang, kamu akan mempelajari bagaimana menentukan panjang busur, luas juring, dan luas tembereng. Untuk itu, pelajari uraian berikut secara saksama.

1. Panjang Busur dan Luas Juring Lingkaran

Perhatikan Gambar 6.7 di samping. Gambar tersebut menunjukkan sebuah lingkaran dengan titik pusat O. Ruas garis OA dan OB disebut sebagai jari-jari lingkaran O. Garis lengkung AB dinamakan busur AB dan daerah yang diarsir disebut sebagai juring AOB. Adapun sudut yang dibentuk oleh jari-jari OA dan OB, serta menghadap ke busur AB dinamakan sudut pusat lingkaran. Apakah ada hubungan antara busur AB, luas juring AOB, dan sudut pusat? Untuk mengetahuinya, lakukan kegiatan berikut ini.

Gambar 6.7 : Juring AOB

Kegiatan 6.2

1. Siapkan karton, jangka, dan spidol.
2. Buatlah sebuah lingkaran dengan jari-jari sebarang dan berpusat di titik O.
3. Potonglah lingkaran tersebut menjadi beberapa juring yang sama besar. Misalkan, lingkaran tersebut dibagi menjadi 8 juring yang sama besar seperti pada Gambar 6.8 .
4. Amati bagian-bagian dari potongan lingkaran tersebut, mulai dari sudut pusat, luas juring, sampai dengan panjang busurnya.
5. Kemudian, buatlah perbandingan sebagai berikut.

$$\frac{\text{sudut pusat}}{\text{sudut satu putaran}} = \frac{45^\circ}{360^\circ} = \ldots$$

$$\frac{\text{panjang busur } AB}{\text{keliling lingkaran}} = \ldots$$

$$\frac{\text{luas juring } AOB}{\text{luas lingkaran}} = \ldots$$

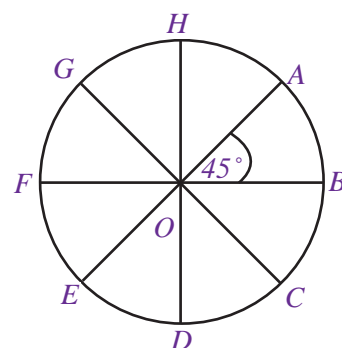
6. Buatlah lagi suatu lingkaran, kali ini dengan jari-jari sebarang. Bagilah lingkaran tersebut menjadi 16 juring yang sama besar. Kemudian, ulangi langkah ke-4 dan ke-5.

Apa yang dapat kamu simpulkan dari ketiga perbandingan tersebut?

Gambar 6.8 : Sudut Pusat

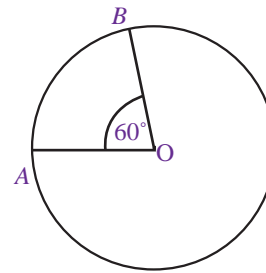
Jika kamu melakukan kegiatan dengan benar, kamu akan memperoleh nilai perbandingan antara sudut pusat dengan sudut satu putaran, panjang busur dengan keliling lingkaran, serta luas juring dengan luas lingkaran adalah sama. Jadi, dapat dituliskan:

$$\frac{\text{sudut pusat}}{\text{sudut satu putaran}} = \frac{\text{panjang busur}}{\text{keliling lingkaran}} = \frac{\text{luas juring}}{\text{luas lingkaran}}$$

Untuk lebih jelasnya, coba kamu pelajari contoh-contoh soal berikut.

George Louis Lecreck, Conte de Buffon ada lah seorang naturalis dan matematikawan. Dia menunjukkan bahwa jika sebuah jarum dijatuhkan dari ketinggian yang acak ke atas sebuah kertas yang dipenuhi garis-garis sejajar dan panjang jarum sama dengan jarak antara garis-garis itu maka peluang jarum untuk jatuh menganai garis adalah $\frac{2}{\pi}$.

Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia.*

Contoh Soal 6.6

1. Perhatikan lingkaran pada gambar di samping. Jika jari-jari lingkaran tersebut adalah 7 cm, tentukan:
   a. diameter lingkaran,
   b. keliling lingkaran,
   c. panjang busur AB,
   d. luas lingkaran,
   e. luas juring AOB.

Jawab :

a. Panjang diameter lingkaran adalah dua kali panjang jari-jarinya.
$d = 2r$ maka $d = 2 \times (7)$
$d = 14$
Jadi, diameter lingkaran tersebut adalah 14 cm.

b. $K = \pi \times d$ maka $K = \frac{22}{7} \times 14$
$= 22 \times 2$
$= 44$
Jadi, keliling lingkaran tersebut adalah 44 cm.

c. $\frac{\text{panjang busur } AB}{\text{keliling lingkaran}} = \frac{\text{sudut pusat } AOB}{\text{sudut satu putaran}}$
$\text{panjang busur } AB = \frac{\text{sudut pusat } AOB}{\text{sudut satu putaran}} \times \text{keliling lingkaran}$
$\text{Panjang busur } AB = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times 44$
$= \frac{1}{6} \times 44$
$= 7\frac{1}{3}$
Jadi, panjang busur AB adalah $7\frac{1}{3}$ cm.

d. $L = \pi \times r^2$ maka $L = \frac{22}{7} \times (7)^2$
$= \frac{22}{7} \times 49$
$= 22 \times 7$
$= 154$
Jadi, luas lingkaran tersebut adalah 154 cm^2.

e. $\frac{\text{luas juring } AOB}{\text{luas lingkaran}} = \frac{\text{sudut pusat } AOB}{\text{sudut satu putaran}}$
$\text{luas juring } AOB = \frac{\text{sudut pusat } AOB}{\text{sudut satu putaran}} \times \text{luas lingkaran}$
$= \frac{60^\circ}{360^\circ} \times 154$
$= \frac{1}{6} \times 154$
$= 25\frac{2}{3}$
Jadi, luas juring AOB adalah $25\frac{2}{3}$ cm^2

Contoh Soal 6.7

Perhatikan lingkaran pada gambar berikut. Jika luas juring AOB adalah 50 cm^2, tentukan:

a. luas juring BOC,

b. luas lingkaran O.

Jawab :

a. $\dfrac{\text{luas juring } BOC}{\text{luas juring } AOB} = \dfrac{\text{sudut pusat } BOC}{\text{sudut pusat } AOB}$

$\text{luas juring } BOC = \dfrac{\text{sudut pusat } BOC}{\text{sudut pusat } AOB} \times \text{luas juring } AOB$

$= \dfrac{60^\circ}{120^\circ} \times 50 = \dfrac{1}{2} \times 50^\circ$

$= 25$

Jadi, luas juring BOC adalah 25 cm^2.

b. $\dfrac{\text{luas juring } BOC}{\text{luas lingkaran}} = \dfrac{\text{sudut pusat } BOC}{\text{sudut satu putaran}}$

$\text{luas lingkaran} = \dfrac{\text{sudut satu putaran}}{\text{sudut pusat BOC}} \times \text{luas juring } BOC$

$= \dfrac{360^\circ}{60^\circ} \times 25$

$= 6 \times 25$

$= 150$

Jadi, luas lingkaran tersebut adalah 150 cm^2.

2. Luas Tembereng

Seperti yang telah dipelajari sebelumnya, tembereng adalah daerah yang dibatasi oleh busur dan tali busur lingkaran. Perhatikan Gambar 6.9 . Gambar tersebut menunjukkan lingkaran O dengan garis lurus AB sebagai tali busur dan garis lengkung AB sebagai busur lingkaran. Daerah yang diarsir antara tali busur AB dan busur AB disebut tembereng. Berikut ini adalah langkah-langkah untuk menentukan luas tembereng.

a. Tentukan luas juring AOB.

b. Tentukan panjang tali busur.

c. Tentukan panjang garis apotema OC.

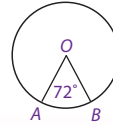
d. Hitung luas segitiga AOC.

Luas segitiga = $\frac{1}{2}$ × panjang tali busur AB × panjang apotema OC.

e. Hitung luas tembereng.

Luas tembereng = luas juring AOB – luas segitiga AOB,

Untuk lebih jelasnya, coba kamu pelajari contoh-contoh soal berikut.

Gambar berikut menunjukkan sebuah lingkaran berpusat di titik O.

Jika panjang busur AB = 6,28 cm maka panjang jari-jari lingkaran tersebut adalah ....

a. 1,3 cm c. 4 cm

b. 2,5 cm d. 5 cm

Jawab:

Diketahui panjang busur AB = 6,28 cm dan – AOB = 72°

Panjang busur AB

$= \dfrac{\text{besar} - AOB}{360^\circ} \times \text{keliling lingkaran}$

$6{,}28 = \dfrac{72^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$

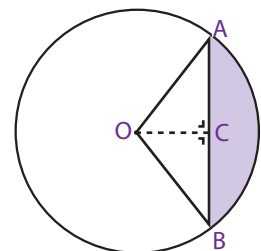
$= \dfrac{1}{5}\ 2 \times 2{,}314 \times r$

$6{,}28 \times 5 = 6{,}28 \times r$

$5 = r$

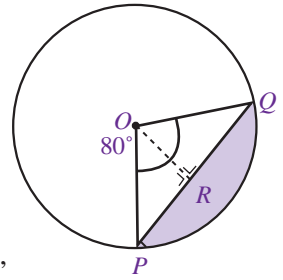
Jadi, panjang jari-jari lingkaran tersebut adalah 5 cm.

Jawaban: d

UAN SMP, 2004

Gambar 6.9 : Tembereng

Contoh Soal 6.8

Perhatikan gambar di samping. Diketahui panjang jari-jari lingkaran O adalah 10 cm. Jika panjang tali busur PQ adalah 12 cm, tentukan:

a. panjang garis apotema OR,
b. luas segitiga POQ,
c. luas juring POQ,
d. luas tembereng (daerah yang diarsir).

Jawab :

a. Perhatikan segitiga ORQ. Menurut Teorema Pythagoras,

$OR^2 = OQ^2 - RQ^2$ maka $OR^2 = 10^2 - 6^2$

$$OR^2 = 100^2 - 36^2$$
$$= 64$$
$$OR = \sqrt{64}$$
$$OR = 8$$

Jadi, panjang garis apotema OR adalah 8 cm.

b. Untuk mencari luas segitiga POQ:

$$\text{Luas } \Delta\ POQ = \frac{a\ ¥\ t}{2} = \frac{PQ\ ¥\ OR}{2}$$
$$= \frac{12 \text{ cm}\ ¥\ 8 \text{ cm}}{2}$$
$$= \frac{96}{2}$$
$$= 48$$

Jadi, luas segitiga POQ adalah 48 cm^2.

c. Sebelum menentukan luas juring POQ, kamu harus menghitung luas lingkaran O terlebih dahulu.

$$\text{Luas lingkaran} = \pi \times r^2$$
$$= 3{,}14 \times 10 \text{ cm}^2$$
$$= 3{,}14 \times 100$$
$$= 314$$

Jadi, luas lingkaran tersebut adalah 314 cm^2.

Untuk menghitung luas juring:

$$\frac{\text{Luas juring } POQ}{\text{luas lingkaran}} = \frac{\text{sudut pusat } POQ}{\text{sudut satu putaran}}$$

$$\text{luas juring } POQ = \frac{\text{sudut pusat } POQ}{\text{sudut satu putaran}}\ ¥ \text{ luas lingkaran}$$
$$= \frac{80^\circ}{360^\circ}\ ¥\ 314$$
$$= \frac{2}{9}\ ¥\ 314$$
$$= 69\frac{7}{9}$$

Jadi, luas juring POQ adalah $69\frac{7}{9}$ cm^2.

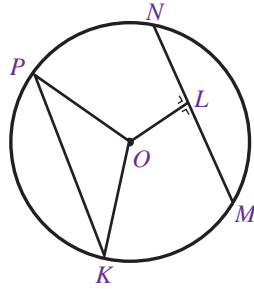
d. Luas tembereng = luas juring POQ – luas segitiga POQ

$$= 69\frac{7}{9} - 48$$
$$= 21\frac{7}{9}$$

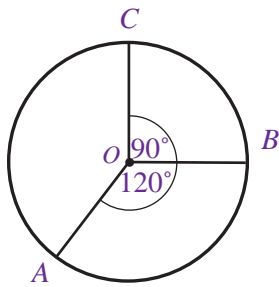
Jadi, luas tembereng (daerah yang diarsir) adalah $21\frac{7}{9}$ cm^2.

Uji Kompetensi 6.3

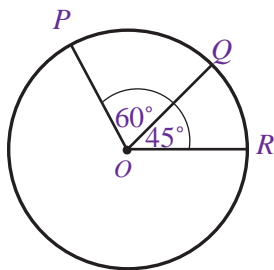
Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Perhatikan gambar berikut.
Tentukan:
a. apotema,
b. juring lingkaran,
c. tembereng,
d. busur.

2. Sebuah lingkaran memiliki jari-jari 14 cm. Jika panjang busur *AOB* adalah 22 cm, tentukan:
a. diameter lingkaran,
b. keliling lingkaran,
c. sudut pusat *AOB*.

3. Jari-jari sebuah lingkaran adalah 10 cm. Tentukan panjang busur lingkaran yang memiliki sudut pusat sebagai berikut.
a. 30˚ **d.** 120˚
b. 60˚ **e.** 180˚
c. 90˚

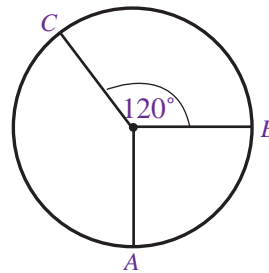
4. Perhatikan gambar berikut.

Jika jari-jari lingkaran tersebut adalah 7 cm, tentukan:
a. keliling lingkaran,
b. panjang busur *AB*,
c. panjang busur *BC*,
d. panjang busur *AC*.

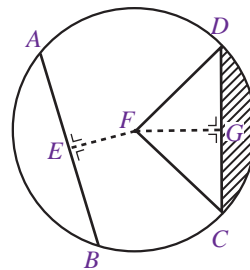
5. Diketahui keliling sebuah lingkaran adalah 100 cm. Tentukan besarnya sudut pusat yang dibentuk jika memiliki panjang busur sebagai berikut.
a. 10 cm, **d.** 40 cm,
b. 20 cm, **e.** 50 cm.
c. 25 cm,

6. Perhatikan gambar di bawah ini. Jika panjang busur *QR* adalah 10 cm, tentukanlah:

a. panjang busur *PQ*,
b. keliling lingkaran,
c. diameter lingkaran,
d. jari-jari lingkaran.

7. Jari-jari suatu lingkaran adalah 20 cm. Tentukan luas juring lingkaran yang dibentuk oleh sudut pusat sebagai berikut.
a. 30˚ **d.** 50˚
b. 45˚ **e.** 120˚
c. 60˚

8. Diketahui luas sebuah lingkaran adalah 200 cm^2. Tentukan besarnya sudut pusat yang dibentuk juring yang memiliki luas sebagai berikut.
a. 10 cm^2, **d.** 50 cm^2,
b. 20 cm^2, **e.** 100 cm^2.
c. 40 cm^2,

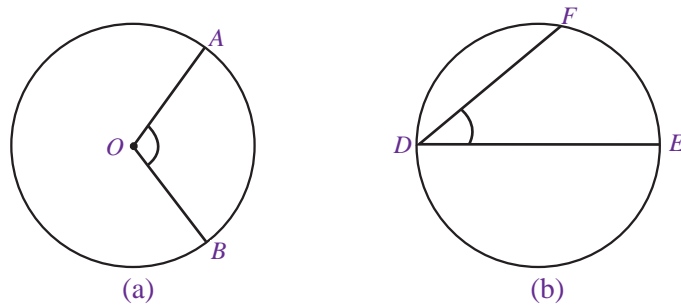
9. Perhatikan lingkaran pada gambar berikut.

Jika luas juring *AOB* adalah 50 cm, tentukan:
a. luas juring *BOC*,
b. luas juring *AOC*,
c. luas lingkaran tersebut.

10. Perhatikan gambar di bawah ini.

Jika jari-jari lingkaran 10 cm, panjang tali busur *AB* adalah 15 cm, dan panjang tali busur *CD* adalah 16 cm, maka tentukanlah:
a. panjang apotema *EF*,
b. panjang apotema *FG*,
c. luas juring *FCD*,
d. luas segitiga *FCD*,
e. luas tembereng *CD*.

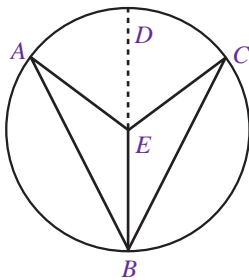
D. Sudut -Sudut pada Bidang Lingkaran

Pada subbab ini, kamu akan mempelajari bagaimana menentukan besarnya sudut yang dibentuk oleh dua tali busur. Akan tetapi, sebelum mempelajari materi tersebut, kamu harus memahami apa yang dimaksud dengan sudut pusat dan sudut keliling. Pelajarilah uraian berikut secara saksama.

1. Sudut Pusat dan Sudut Keliling

Masih ingatkah kamu apa yang dimaksud dengan sudut pusat? Seperti yang telah disebutkan sebelumnya, sudut pusat adalah sudut yang dibentuk oleh dua buah jari-jari dan menghadap suatu busur lingkaran. Sekarang, apa yang dimaksud dengan sudut keliling? Sudut keliling adalah sudut pada lingkaran yang dibentuk oleh dua buah tali busur. Coba kamu amati Gambar 6.10 berikut.

Gambar 6.10 : Sudut Pusat dan Sudat Keliling

Gambar 6.10 menunjukkan perbedaan antara sudut pusat dan sudut keliling. Perhatikan bahwa Gambar 6.10(a) menunjukkan sudut pusat *AOB*, sedangkan Gambar 6.10(b) menunjukkan sudut keliling *EDF*. Pada bagian ini, akan dibahas hubungan dan sifat-sifat sudut pusat dengan sudut keliling.

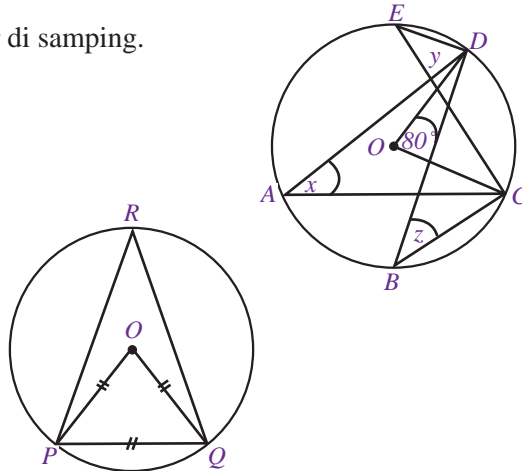
a. Hubungan Sudut Pusat dan Sudut Keliling

Gambar 6.11 : Sudut Pusat dan Sudut Keliling

Amati Gambar 6.11 secara saksama. Titik *E* adalah titik pusat lingkaran, $\angle AEC$ adalah sudut pusat lingkaran, $\angle AEC$ adalah sudut pusat lingkaran, dan $\angle ABC$ adalah sudut keliling lingkaran. Perhatikan bahwa $\angle AEC$ dan $\angle ABC$ menghadap busur yang sama, yaitu busur *AC*.

- Perhatikan segitiga *ABE*.
  Oleh karena segitiga ABE merupakan segitiga samakaki maka
  $\angle EAB = \angle ABE$
  Jadi, $\angle AEB = 180^\circ - 2 \times \angle ABE$
- Perhatikan segitiga *CBE*.
  Oleh karena segitiga *CBE* merupakan segitiga samakaki maka
  $\angle EBC = \angle BCE$
  Jadi, dapat ditentukan bahwa $\angle CEB = 180^\circ - 2 \times \angle CBE$
- Perhatikan sudut pusat *AEC*.

$$
\begin{aligned}
\angle AEC &= 360^\circ - (\angle AEB + \angle CEB) \\
&= 360^\circ - (180^\circ - 2 \times \angle ABE + 180^\circ - 2\ \angle CBE) \\
&= 360^\circ - (360^\circ - 2 \times \angle ABE - 2\ \angle CBE) \\
&= 360^\circ - 360^\circ + 2 \times \angle ABE + 2\ \angle CBE \\
&= 2 \times \angle ABE + 2 \times \angle CBE \\
&= 2 \times (\angle ABE + \angle CBE) \\
&= 2 \times \angle ABC
\end{aligned}
$$

Ternyata, uraian tersebut menunjukkan bahwa **jika sudut pusat lingkaran dan sudut keliling lingkaran menghadap busur yang sama maka besar sudut pusat adalah dua kali dari besar sudut keliling.**

1. Perhatikan lingkaran pada gambar di samping. Dari gambar tersebut, tentukan:
   a. nilai x,
   b. nilai y,
   c. nilai z.
2. Perhatikan lingkaran pada gambar di samping. Jika segitiga POQ merupakan segitiga samasisi, tentukan:
   a. $\angle OPQ$,
   b. $\angle PQO$,
   c. $\angle POQ$,
   d. $\angle PRQ$.

Jawab :

1. Diketahui sudut pusat COD sebesar 80° yang menghadap busur CD
   a. x merupakan sudut keliling yang menghadap busur CD sehingga:

   $$x = \frac{1}{2} \cdot \angle COD$$
   $$= \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ$$

   Jadi, nilai $x = 40^\circ$.

   b. y merupakan sudut keliling yang menghadap busur CD sehingga:

   $$y = \frac{1}{2} \cdot \angle COD$$
   $$= \frac{1}{2} .80^\circ = 40^\circ$$

   Jadi, nilai y = 40°.

   c. z merupakan sudut keliling yang menghadap busur CD sehingga:

   $$z = \frac{1}{2} \angle COD$$
   $$= \frac{1}{2} .\ 80^\circ = 40^\circ$$

   Jadi, nilai $z = 40^\circ$.
2. Diketahui segitiga POQ merupakan segitiga samasisi sehingga setiap sudutnya berukuran 60°.
   a. $\angle OPQ = 60^\circ$
   b. $\angle PQO = 60^\circ$
   c. $\angle POQ = 60^\circ$
   d. $\angle PRQ$ merupakan sudut keliling yang menghadap busur yang sama dengan sudut pusat POQ. Jadi, besar $\angle PRQ$ adalah

   $$\angle PRQ = \frac{1}{2} \times \angle POQ$$
   $$= \frac{1}{2} \times 60^\circ$$
   $$= 30^\circ$$

b. Sifat Sudut Pusat dan Sudut Keliling

Berikut ini akan diuraikan sifat-sifat yang dimiliki oleh sudut pusat dan sudut keliling.

1) Sudut keliling yang menghadap diameter lingkaran

Gambar 6.12 : Lingkaran dan sudut siku

Coba kamu amati Gambar 6.12 . Pada gambar tersebut, lingkaran O memiliki diameter PQ. Dapat dilihat bahwa $\angle POQ$ merupakan sudut pusat, adapun $\angle PRQ$ merupakan sudut keliling yang menghadap busur PQ. Ingat, jika sudut pusat dan sudut keliling menghadap busur yang sama, maka

sudut pusat = 2 × sudut keliling

180° = 2 × sudut keliling

sudut keliling $= \dfrac{180^\circ}{2}$

$= 90^\circ$

Hal ini menunjukkan bahwa **sudut keliling yang menghadap diameter lingkaran selalu membentuk sudut 90°atau sudut siku-siku.**

2) Sudut keliling yang menghadap busur yang sama

Gambar 6.13 : Sudut Keliling yang sama besar

Coba kamu amati Gambar 6.13. Dari gambar tersebut, diperoleh:

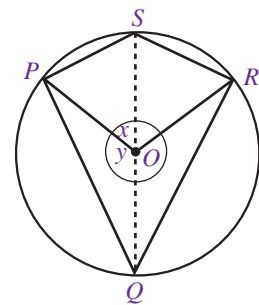
- $\angle QOR$ merupakan sudut pusat lingkaran yang menghadap busur QR.

- $\angle QTR$ merupakan sudut keliling lingkaran yang menghadap ke busur QR. Jadi, $\angle QTR = \dfrac{1}{2}\ \angle QOR$
- $\angle QPR$ merupakan sudut keliling lingkaran yang menghadap ke busur QR. Jadi, $\angle QPR = \dfrac{1}{2}\ \angle QOR$
- $\angle QSR$ merupakan sudut keliling lingkaran yang menghadap ke busur QR. Jadi, $\angle QSR = \dfrac{1}{2}\ \angle QOR$

Dari uraian berikut, diperoleh bahwa:

$$\angle QTR = \angle QPR = \angle QSR = \frac{1}{2}\ \angle QOR$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa semua **sudut keliling yang menghadap busur yang sama memiliki ukuran sudut/besar sudut yang sama.**

(3) Sudut-sudut keliling yang saling berhadapan

Gambar 6.14 : Sudut Keliling yang berhadapan

Amati Gambar 6.14 . Perhatikan bahwa $\angle POR$ merupakan sudut pusat lingkaran, sedangkan $\angle PSR$ dan $\angle PQR$ adalah sudut-sudut keliling yang sama besar. Oleh karena $\angle PSR$ dan $\angle PQR$ merupakan sudut-sudut keliling yang menghadap busur yang sama dengan sudut pusat $\angle POR$ maka berlaku:

- $\angle PSR = \dfrac{1}{2} \times \angle POR = \dfrac{1}{2} \times y$
- $\angle PQR = \dfrac{1}{2} \times \angle POR = \dfrac{1}{2} \times x$

Jika sudut keliling tersebut dijumlahkan, diperoleh

$$\angle PSR\ \angle - PQR = \left[\frac{1}{2} \times y\right] + \left[\frac{1}{2} \times x\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2} \times y\right] + \left\{\frac{1}{2} \times (360^\circ - y)\right\}$$

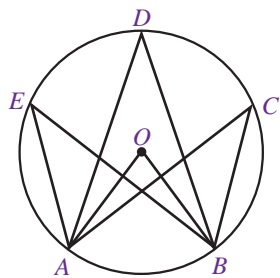
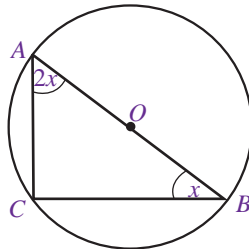
$$= \left(\frac{1}{2} \times y\right) + \left(\frac{1}{2} \times 360°\right) - \left(\frac{1}{2} \times y\right)$$

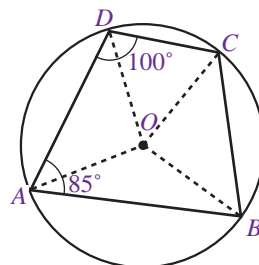
$$= \left(\frac{1}{2} \times y\right) - \left(\frac{1}{2} \times y\right) + 180°$$

$$= 180^\circ$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa **jumlah sudut keliling yang saling berhadapan sama dengan 180°.**

Contoh Soal 6.10

1. Perhatikan lingkaran pada gambar berikut. Lingkaran tersebut memiliki diameter AB dan sudut keliling ACB. Tentukan:
   - **a.** besar $\angle ACB$,
   - **b.** nilai x,
   - **c.** besar $\angle CAB$,
   - **d.** besar $\angle ABC$.

2. Perhatikan lingkaran pada gambar di samping. Perhatikan bahwa $\angle AOB$ merupakan sudut pusat lingkaran. Jika besar $\angle AOB = 30^\circ$, tentukan:
   - **a.** besar $\angle AEB$,
   - **b.** besar $\angle ADB$,
   - **c.** besar $\angle ACB$.

3. Perhatikan lingkaran pada gambar berikut ini. Diketahui $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, dan $\angle CDA$ adalah sudut keliling pada lingkaran. Jika $\angle CDA$ adalah 100° dan $\angle DAB$ adalah 85°, tentukan:
   - **a.** besar $\angle ABC$,
   - **b.** besar $\angle BCD$.

Jawab :

1. **a.** $\angle ACB$ merupakan sudut keliling yang menghadap diameter sehingga $\angle ACB = 90^\circ$

   b. Perhatikan segitiga ABC. Ingat bahwa jumlah sudut segitiga adalah 180°.

$$\angle ACB + \angle CBA + BAC = 180^\circ$$
$$90^\circ + x + 2x = 180^\circ$$
$$3x = 180^\circ - 90^\circ$$
$$3x = 90^\circ$$
$$x = 30^\circ$$

   Jadi, nilai $x = 30^\circ$.

c. $\angle CAB = 2x$
$= 2\ (30^\circ)$
$= 60^\circ$
Jadi, nilai $\angle CAB$ adalah 60°

d. Oleh karena besar $\angle ABC$ = nilai x maka
$\angle ABC = x$
$= 30^\circ$

2. a. Oleh karena $\angle AEB$ merupakan sudut keliling lingkaran maka besar $\angle AEB$ adalah
$$\angle AEC = \frac{1}{2} \times \angle AOB$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (30^\circ)$$
$$= 15^\circ$$

b. Oleh karena $\angle ADB$ merupakan sudut keliling yang menghadap busur yang sama dengan sudut keliling $\angle AEB$ maka besar $\angle ADB$ adalah
$\angle ADB = \angle AEB$
$= 15^\circ$

c. Oleh karena $\angle ACB$ merupakan sudut keliling yang menghadap busur yang sama dengan sudut keliling $\angle AEB$ dan $\angle ADB$ maka besar $\angle ACB$ adalah
$\angle ACB = \angle AEB = \angle ADB$
$= 15^\circ$

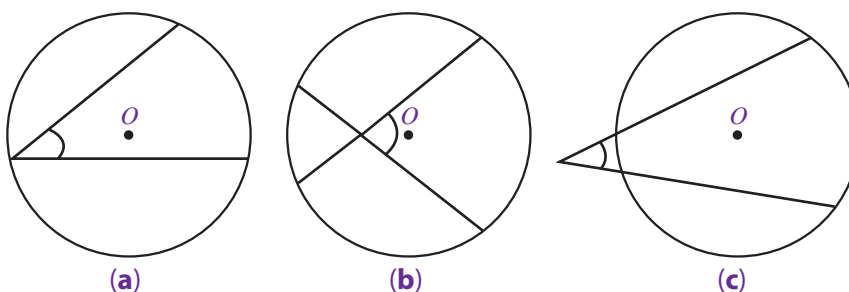
3. a. Perhatikan bahwa – ABC merupakan sudut keliling yang berhadapan dengan sudut keliling – CDA.
$\angle ABC$ + – $CDA = 180^\circ$
$\angle ABC + 100^\circ = 180^\circ$
$\angle ABC = 180^\circ - 100^\circ$
$\angle ABC = 80^\circ$
Jadi, besar $\angle ABC$ adalah 80°.

b. Perhatikan bahwa $\angle BCD$ merupakan sudut keliling yang berhadapan dengan sudut keliling $\angle DAB$.
$\angle BCD$ + – $DAB = 180^\circ$
$\angle BCD + 85^\circ = 180^\circ$
$\angle BCD = 180^\circ - 85^\circ$
$\angle BCD = 95^\circ$
Jadi, besar $\angle BCD$ adalah 95°

Agar kamu lebih memahami sifat-sifat sudut pusat dan keliling, pelajarilah Contoh Soal 6.10

2. Sudut Antara Dua Tali Busur

Pada materi sebelumnya, kamu telah mempelajari sudut keliling yang merupakan sudut dari perpotongan dua tali busur yang tepat berada di lengkungan lingkaran. Hal ini ditunjukkan pada Gambar 6.15 (a) . Bagaimana jika perpotongan tali busurnya tidak tepat berada di lengkungan lingkaran?

Keterangan **Gambar 6.15**
(a) Dua tali busur yang berpotongan
(b) di dalam lingkaran
(c) di luar lingkaran

Gambar 6.15 : dua tali busur yang berpotongan

Misalnya, di dalam lingkaran atau di luar lingkaran seperti ditunjukkan pada Gambar 6.15(b) dan Gambar 6.15(c) .

Jika kedua tali busur saling berpotongan di dalam atau di luar lingkaran, bagaimana menghitung besar sudutnya? Coba kamu perhatikan dan pelajari uraian berikut.

a. Saling Berpotongan di Dalam Lingkaran

Coba kamu amati Gambar 6.16 . Pada gambar tersebut, lingkaran *O* memiliki jari-jari *OP*, *OQ*, *OR*, dan *OS*. Adapun *SQ* dan *PR* merupakan dua tali busur yang berpotongan di titik *T*. Dari gambar tersebut, diperoleh:

- $\angle PQS = \frac{1}{2} \cdot \angle POS$
- $\angle QSR = \frac{1}{2} \cdot \angle QOR$

Gambar 6.16 : Tali busur *PR* dan *QS* berpotongan di dalam lingkaran

Misalkan, kamu akan menghitung besar sudut *PTS*. Dengan menggunakan hubungan sudut dalam dan luar segitiga, diperoleh:

$$\angle PTS = \angle PQS + \angle QSR$$
$$= \frac{1}{2} - POS + \frac{1}{2}\ \angle QOR$$
$$= \frac{1}{2}\ (\angle POS + \angle QOR)$$

Dari uraian tersebut, dapat dikatakan bahwa besar sudut antara dua tali busur yang berpotongan di dalam lingkaran adalah setengah kali dari jumlah sudut pusat yang beradadi depan dan di belakangnya.

Contoh Soal 6.11

Perhatikan lingkaran pada gambar di samping. Jika besar sudut pusat AOB adalah 80˚ dan sudut pusat DOC adalah 40˚, tentukanlah:

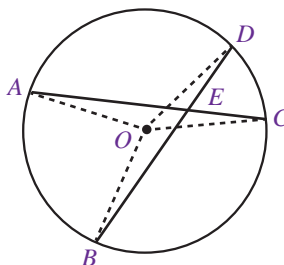
a. besar $\angle AEB$,
b. besar $\angle DEC$,
c. besar $\angle BEC$,
d. besar $\angle AED$.

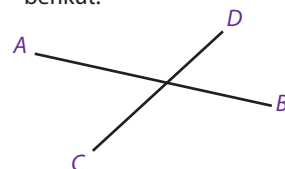
Jawab :

a. $\angle AEB = \frac{1}{2} \cdot (\angle AOB + \angle DOC)$
$= \frac{1}{2} \cdot (80^\circ + 40^\circ)$
$= \frac{1}{2} \cdot (120^\circ)$
$= 60^\circ$

Jadi, besar $\angle AEB$ adalah 60˚.

b. $\angle DEC = \angle AEB$, saling bertolak belakang
$= 60^\circ$

Jadi, besar $\angle OEB$ adalah 60˚.

Plus +

Besar dua sudut yang saling bertolak belakang adalah sama. Perhatikan gambar berikut.

Pada gambar tersebut, sudut-sudut yang saling bertolak belakang adalah $\angle AOD$ dengan $\angle BOC$ dan $\angle AOC$ dengan $\angle BOD$ dan besar $\angle AOD$ = besar $\angle BOC$ dan besar $\angle AOC$ = besar $\angle BOD$.

c. $\angle PQR = \frac{1}{2} \cdot (360^\circ - (\angle AEB + \angle DEC)$

$= \frac{1}{2} \cdot (360^\circ - (60^\circ + 60^\circ)$

$= \frac{1}{2} \cdot (360^\circ - 120^\circ)$

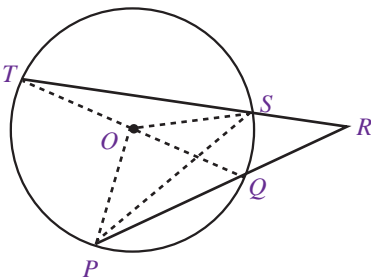
$= \frac{1}{2} \cdot (240^\circ)$

$= 120^\circ$

Jadi, besar – PQR adalah 120°.

d. $\angle AED = \angle BEC$, saling bertolak belakang

$= 120^\circ$

sudut-sudut pusat yang berada di depan dan di belakangnya. Untuk lebih jelasnya, coba perhatikan dan pelajari Contoh Soal 6.11

Gambar 6.17 : Berpotongan di luar lingkaran

b. Saling Berpotongan di Luar Lingkaran

Coba kamu amati Gambar 6.17. Perhatikan bahwa $\angle POT$ dan $\angle SOQ$ merupakan sudut pusat lingkaran. TR dan PR merupakan dua tali busur lingkaran yang saling berpotongan di luar lingkaran pada titik R. Dari gambar tersebut, diperoleh:

- $\angle TSP = \frac{1}{2} - TOP$
- $\angle SPQ = \frac{1}{2} - SOP$

Dengan menggunakan hubungan sudut dalam dan sudut luar segitiga, diperoleh:

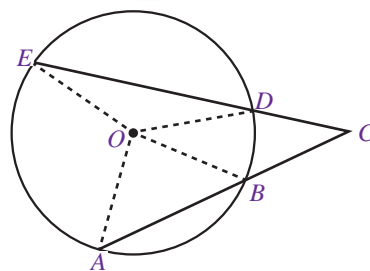
$$\angle TRP = \angle TSP - \angle SPQ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \angle TOP - \frac{1}{2} \cdot \angle SOP$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\angle TOP - \angle SOP)$$

Dari uraian tersebut, diperoleh hubungan bahwa **besar sudut antara dua tali busur yang berpotongan di luar lingkaran adalah setengah kali selisih sudut pusat yang terletak di antara kedua tali busur tersebut**.

Untuk lebih jelasnya, pelajarilah Contoh Soal 6.12

Contoh Soal 6.12

Perhatikan lingkaran pada gambar di samping. Jika besar sudut pusat AOE adalah 100° dan sudut pusat BOD adalah 30°, tentukan besar sudut ACE.

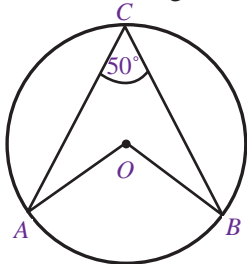
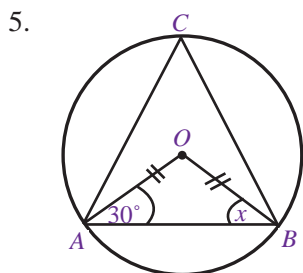
Jawab :
Oleh karena tali busur *AC* dan *CE* berpotongan di luar lingkaran maka

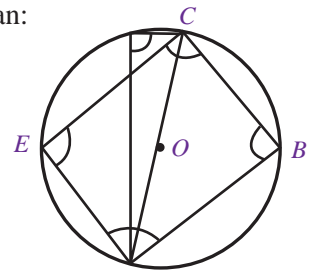
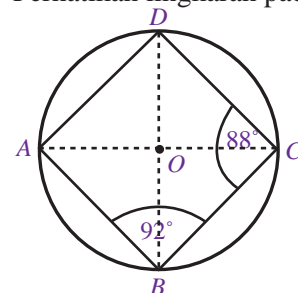
$$\begin{aligned}\angle ACE &= \frac{1}{2} \cdot (\angle AOE - \angle BOD) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (100^\circ - 30^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 70^\circ \\ &= 35^\circ\end{aligned}$$

Jadi, besar $\angle ACE$ adalah 35°

Uji Kompetensi 6.4

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Tunjukkan dengan gambar apa yang dimaksud dengan:
   a. sudut pusat,
   b. sudut keliling.
2. Tuliskan rumus umum yang menunjukkan hubungan antara sudut pusat dan sudut keliling.
3. Tunjukkan dengan gambar mengenai sifat-sifat sudut pusat dan sudut keliling.
4. Perhatikan lingkaran pada gambar berikut

   Dari gambar tersebut, tentukan:
   a. nama sudut keliling,
   b. besar sudut keliling,
   c. nama sudut pusat,
   d. besar sudut keliling.
5.

   Pada gambar di atas, segitiga *AOB* adalah segitiga samakaki yang salah satu kaki sudutnya memiliki besar sudut 30°. Tentukan:
   a. nilai *x*,
   b. besar $\angle AOB$,
   c. besar sudut keliling *ACB*.
6. Perhatikan lingkaran pada gambar berikut. Dari gambar tersebut, tentukan:
   a. besar $\angle ABC$,
   b. besar $\angle ADC$,
   c. besar $\angle AEC$.

7.

   Perhatikan gambar di atas, jika besar $\angle DCE = 70^\circ$, tentukan:
   a. besar $\angle DBE$,
   b. besar $\angle DAE$,
   c. besar $\angle DOE$.
8. Perhatikan lingkaran pada gambar berikut.

   Jika besar $\angle BCD = 88^\circ$ dan besar $\angle ABC = 92^\circ$, tentukan:

a. besar – *CDA*,

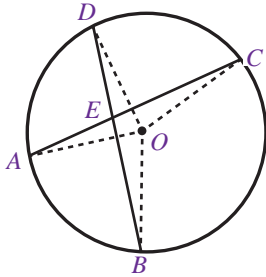
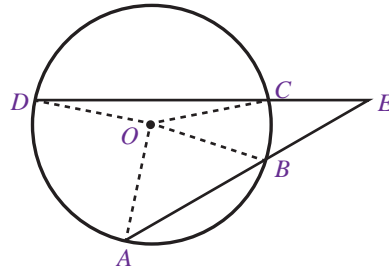
b. besar – *DAB*.

9. Perhatikan lingkaran pada gambar berikut. Jika besar – *BOC* = 108° dan besar – *AOD* = 80° maka tentukan:

   a. besar – *BEC*,

   b. besar – *AED*,

   c. besar – *AEB*,

   d. besar – *DEC*.

10. Perhatikan lingkaran pada gambar berikut. Jika diketahui besar sudut pusat *AOD* sama dengan 94° dan besar sudut pusat *BOC* sama dengan 40°, tentukan besar sudut *AED*.

Rangkuman

1. Titik pusat lingkaran adalah titik yang terletak di tengah-tengah lingkaran.
2. Jari-jari adalah garis dari titik pusat lingkaran ke lengkungan lingkaran.
3. Diameter adalah garis lurus yang menghubungkan dua titik pada lingkaran dan melalui titik pusat.
4. Busur adalah garis lengkung yang terletak pada lengkungan lingkaran dan menghubungkan dua titik pada lingkaran tersebut.
5. Tali busur adalah garis lurus dalam lingkaran yang menghubungkan dua titik pada lengkungan lingkaran.
6. Tembereng adalah luas daerah dalam lingkaran yang dibatasi oleh busur dan tali busur.
7. Juring adalah luas daerah dalam lingkaran yang dibatasi oleh dua buah jari-jari dan sebuah busur yang diapit oleh kedua jari-jari tersebut.
8. Apotema adalah garis yang menghubungkan titik pusat lingkaran dengan tali busur lingkaran tersebut.
9. Keliling lingkaran

   $K = \pi d = 2\pi r$

10. Luas lingkaran

    $L = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$

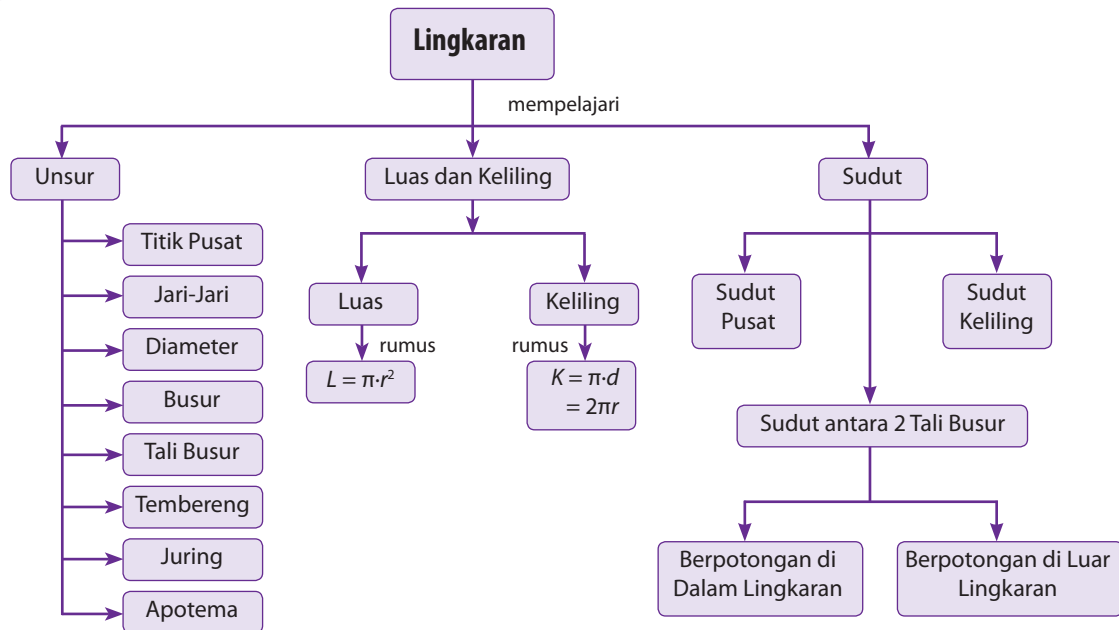
11. Hubungan antara sudut pusat, panjang busur, dan luas juring.

    $$\frac{\text{sudut pusat}}{360^\circ} = \frac{\text{panjang busur}}{\text{keliling lingkaran}} = \frac{\text{luas juring}}{\text{luas lingkaran}}$$

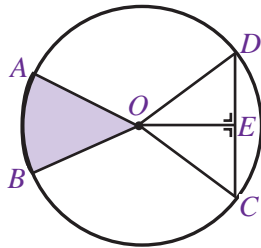
12. Jika sudut pusat dan sudut keliling lingkaran menghadap busur yang sama maka besar sudut pusat adalah dua kali dari besar sudut keliling.
13. Semua sudut keliling yang menghadap busur yang sama memiliki besar sudut yang sama.
14. Jumlah sudut keliling yang saling berhadapan sama dengan 180°.
15. Besar sudut antara dua tali busur yang berpotongan di dalam lingkaran adalah setengah kali dari jumlah sudut-sudut pusat yang berada di depan dan di belakangnya.
16. Besar sudut antara dua tali busur yang berpotongan diluar lingkaran adalah setengah kali dari selisih sudut pusat yang terletak di antara kedua kakinya

Refleksi

- Pada bab Lingkaran ini, menurutmu bagian mana yang paling menarik untuk dipelajari?
- Setelah mempelajari bab ini, apakah kamu merasa kesulitan memahami materi tertentu? Materi apakah itu?
- Kesan apakah yang kamu dapatkan setelah mempelajari materi bab ini?

Peta Konsep

Uji Kompetensi Bab 6

A. Pilihlah satu jawaban yang benar.

1. Perhatikan gambar berikut.

Tali busur ditunjukkan oleh ....

a. *AO* **c.** *DC*
b. *OE* **d.** *OC*

2. Perhatikan kembali gambar pada soal nomor 1. Ruas garis *OE* dinamakan ....

a. tali busur **c.** apotema
b. jari-jari **d.** busur

3. Dari gambar pada soal nomor 1, daerah yang diarsir disebut ....

a. juring **c.** busur
b. tembereng **d.** tali busur

4. Diameter adalah ....

a. tali busur yang melalui titik pusat
b. jarak dari titik pusat ke lengkungan lingkaran
c. garis lengkung dari satu titik ke titik lain pada lengkungan lingkaran
d. garis tegak lurus dari tali busur ke titik pusat

5. Jari-jari sebuah lingkaran memiliki panjang 35 cm. Keliling lingkaran tersebut adalah ....

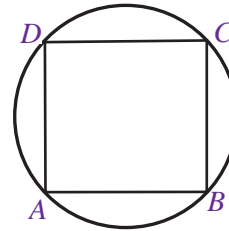
a. 110 cm **c.** 330 cm
b. 220 cm **d.** 440 cm

6. Seutas kawat yang panjangnya 88 cm akan dibuat sebuah lingkaran. Jari-jari lingkaran kawat tersebut adalah ....

a. 7 cm **c.** 21 cm
b. 14 cm **d.** 28 cm

7. Dalam suatu perlombaan, seorang pembalap sepeda menempuh lintasan berbentuk lingkaran dengan jari-jari 500 m. Jika pembalap tersebut menempuh jarak 15.700 m maka jumlah putaran yang ditempuh pembalap tersebut adalah ....

a. 3 **c.** 5
b. 4 **d.** 6

8. Perhatikan gambar berikut.

Jika keliling persegi 56 cm maka keliling lingkaran adalah ....

a. $2\sqrt{2}$ cm **c.** $14\sqrt{2}$ cm
b. $7\sqrt{2}$ cm **d.** $44\sqrt{2}$ cm

9. Sebuah roda berputar sebanyak 50 kali. Jika roda tersebut memiliki diameter 10 cm maka jarak yang ditempuh roda tersebut adalah ....

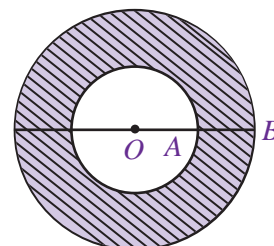
a. 157 cm **c.** 15.700 cm
b. 1.570 cm **d.** 157.000 cm

10. Luas sebuah lingkaran yang memiliki panjang diameter 20 cm adalah ....

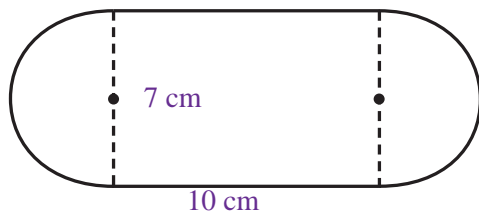
a. 31,4 cm **c.** 3.140 cm
b. 314 cm **d.** 31.400 cm

12. Sebuah lingkaran memiliki luas 6.776 cm^2. Jari-jari lingkaran tersebut adalah ....

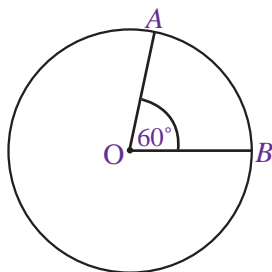
a. 21 cm **c.** 35 cm
b. 28 cm **d.** 49 cm

13. Perhatikan gambar berikut.

Jika panjang *OA* = 5 cm dan panjang *AB* = 3 cm maka luas daerah yang diarsir adalah ....

a. 2.826 cm **c.** 12.246 cm
b. 64.244 cm **d.** 36.412 cm

14. Perhatikan gambar berikut.

Luas daerah bidang datar tersebut adalah ....

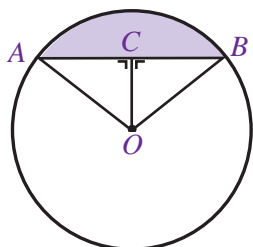
a. 70 cm² c. 38,5 cm²
b. 54,5 cm² d. 108,5 cm²

15. Perhatikan gambar berikut.

Jika jari-jari lingkaran tersebut adalah 7 cm maka panjang busur *AB* adalah ....

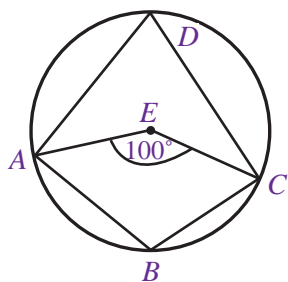
a. 7,4 cm c. 7,2 cm
b. 7,3 cm d. 7,1 cm

16. Perhatikan kembali gambar pada soal nomor 15. Luas juring *AOB* adalah ...

a. 154 cm² c. 22 cm²
b. 25,6 cm² d. 18,6 cm²

17. Perhatikan gambar berikut.

Jika jari-jari lingkaran tersebut sama dengan 10 cm dan panjang *AB* sama dengan 16 cm maka luas tembereng yang diarsir adalah ....

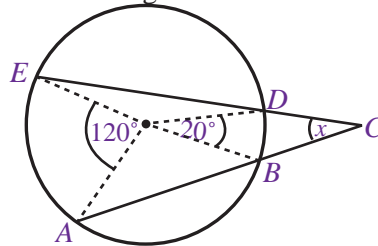
a. 48 cm² c. 314 cm²
b. 266 cm² d. 428 cm²

18. Perhatikan gambar berikut.

Besar sudut *ADC* adalah ....

a. 100° c. 50°
b. 80° d. 25°

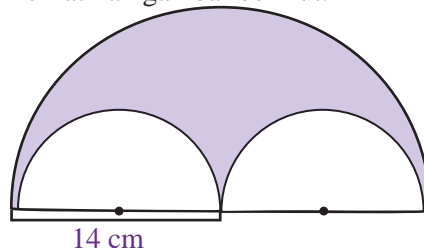
19. Perhatikan gambar pada soal nomor 18, besar sudut *ABC* adalah ....

a. 100° c. 130°
b. 120° d. 110°

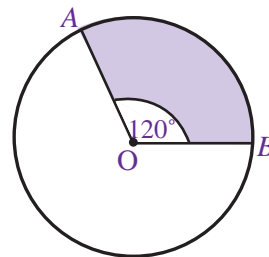
20. Perhatikan gambar berikut.

Nilai *x* sama dengan ....

a. 100° c. 140°
b. 50° d. 70°

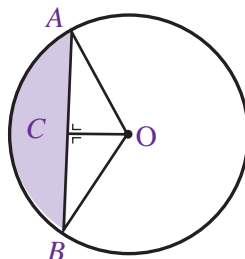
B. Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Perhatikan gambar berikut.

Dari gambar tersebut, tentukan:

a. keliling bangun tersebut,
b. luas daerah yang diarsir.

2. Perhatikan gambar berikut.

Jika jari-jari lingkaran tersebut adalah 10 cm maka tentukan:

a. panjang busur *AB*,
b. luas juring *AOB*.

3. Perhatikan gambar berikut.

Diketahui jari-jari lingkaran tersebut sama dengan 16 cm dan panjang *AB* sama dengan 28 cm.

Tentukan:

a. diameter lingkaran,
b. panjang garis apotema *OC*,
c. luas juring *AOB*,
d. luas segitiga *AOB*,
e. luas tembereng yang diarsir.

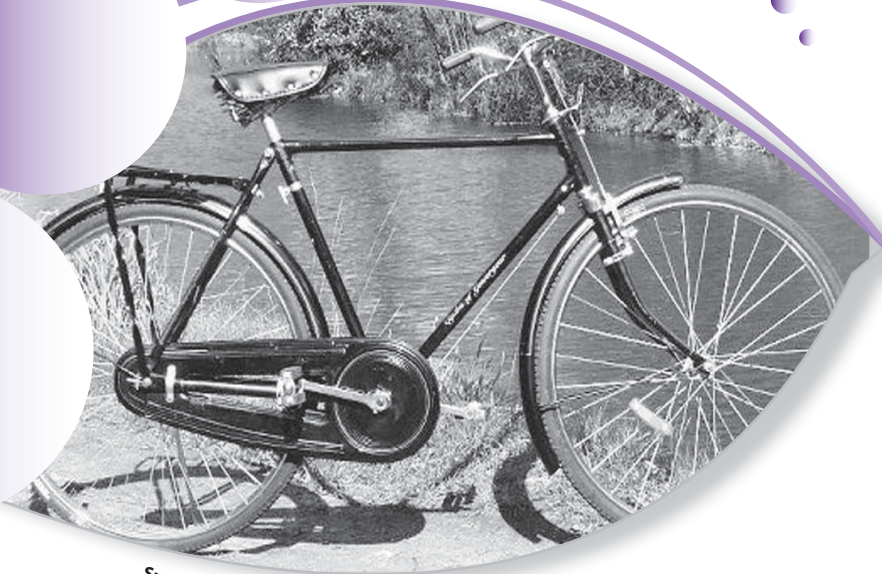
4. Perhatikan gambar berikut.

Dari gambar tersebut, tentukan:

a. besar – *AOB*,
b. besar – *ADB*,
c. besar – *ACB*.

5. Perhatikan gambar berikut.

Jika besar – *BOC* = 122° dan – *AOD* = 32°, tentukan:

a. besar – *AED*,
b. besar – *BEC*,
c. besar – *DEC*,
d. besar – *AEB*.

Sumber: www.homepages.tesco

Bab
7

Garis Singgung Lingkaran

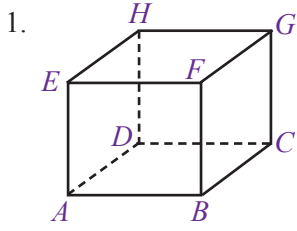
Lingkaran mungkin merupakan salah satu bentuk bangun datar yang paling terkenal. Konsep lingkaran yang meliputi unsur-unsur lingkaran, luas lingkaran, dan keliling lingkaran sudah kamu pelajari sejak Sekolah Dasar.

Banyak benda-benda di sekitarmu yang tanpa kamu sadari sebenarnya menggunakan konsep lingkaran. Misalnya, rantai sepeda, katrol timba, subwoofer, hingga alat-alat musik seperti drum, banjo, dan kerincing.

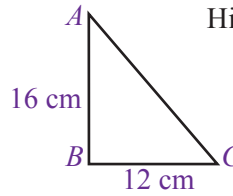
Pada bab ini, kamu akan mempelajari salah satu konsep penting tentang lingkaran, yaitu garis singgung lingkaran.

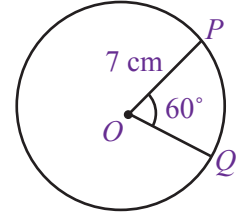
A. Pengertian Garis Singgung Lingkaran
B. Garis Singgung Dua Lingkaran
C. Lingkaran Luar dan Lingkaran Dalam Segitiga

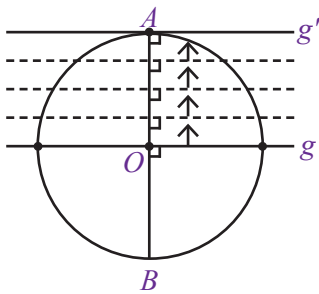
Uji Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari materi pada bab ini, kerjakan soal-soal berikut.

1.

   Dari gambar di samping tentukanlah:
   a. ruas garis yang sejajar,
   b. ruas garis yang berpotongan,
   c. ruas garis yang saling tegak lurus.

2.

   Hitunglah panjang AC.

3. Dari gambar di samping tentukan:
   a. keliling lingkaran,
   b. panjang busur PQ

A. Pengertian Garis Singgung Lingkaran

1. Sifat Garis Singgung Lingkaran

Gambar 7.1 : garis singgung lingkaran yang menyinggung lingkaran di titik *A*.

Gambar 7.1 di samping menunjukkan lingkaran yang berpusat di titik O dengan diameter AB. Garis g tegak lurus AB dan memotong lingkaran di dua titik. Jika g digeser terus menerus ke atas hingga menyentuh titik A maka akan diperoleh garis g' yang menyinggung lingkaran dan tegak lurus AB. Garis g' disebut garis singgung dan titik A disebut titik singgung.

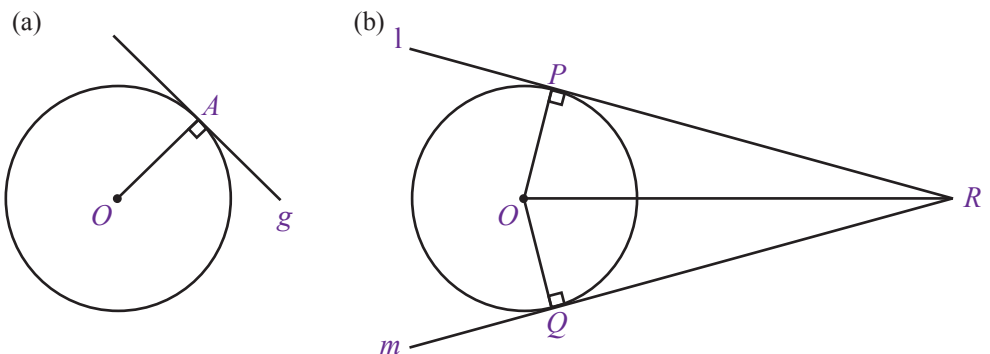
Uraian di atas menggambarkan definisi dari garis singgung lingkaran yaitu:

> Garis singgung lingkaran adalah garis yang memotong lingkaran tepat di satu titik. Titik tersebut dinamakan titik singgung lingkaran.

Setiap garis singgung lingkaran selalu tegak lurus terhadap jari-jari (diameter) yang melalui titik singgungnya.

Perhatikan Gambar 7.2

Gambar 7.2(a) memperlihatkan bahwa garis g menyinggung lingkaran di titik A. Garis g tegak lurus jari-jari OA. Dengan kata lain, hanya terdapat satu buah garis singgung yang melalui satu titik pada lingkaran.

Pada Gambar 7.2(b) , titik R terletak di luar lingkaran. Garis l melalui titik R dan menyinggung lingkaran di titik P, sehingga garis l tegak lurus jari-jari OP. Garis m melalui titik R dan menyinggung lingkaran di titik Q, sehingga garis m tegak lurus jari-jari OQ. Dengan demikian, dapat dibuat dua buah garis singgung melalui satu titik di luar lingkaran.

Gambar 7.2 : Memperlihatkan Garis singgung yang melalui satu titik pada lingkaran dan di luar lingkaran.

Gambar 7.2 : Garis singgung melalui satu titik

2. Melukis Garis Singgung

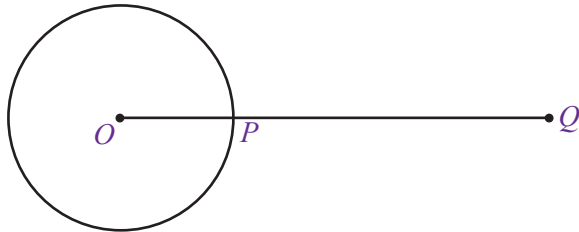
Sebelum melukis garis singgung lingkaran, pastikan kamu telah memiliki jangka dan penggaris sebagai alat bantu. Perhatikan uraian berikut.

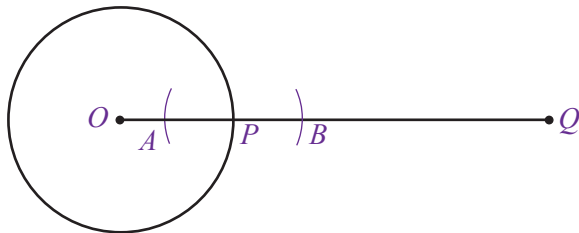
a. Garis Singgung Melalui Satu Titik pada Lingkaran

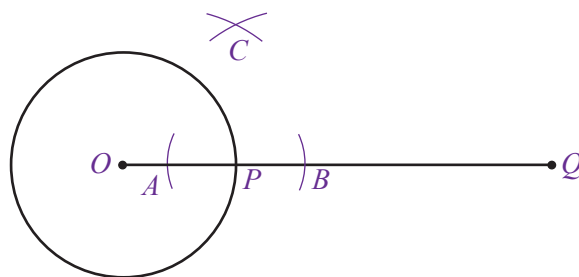
Sebelumnya telah dijelaskan bahwa garis singgung lingkaran selalu tegak lurus terhadap jari-jari (diameter) yang melalui titik singgungnya. Oleh karena itu, melukis garis singgung lingkaran di titik singgung P sama saja dengan melukis garis yang tegak lurus terhadap jari-jari OP.

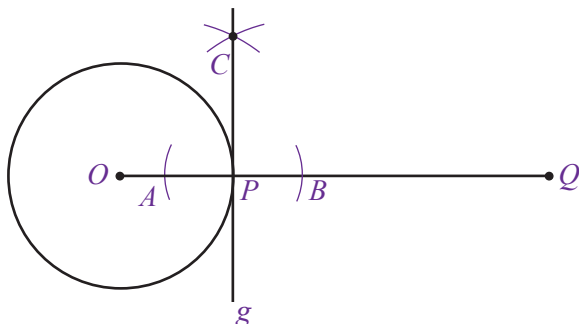
Perhatikan langkah-langkah melukis garis singgung lingkaran melalui satu titik pada lingkaran berikut ini.

1) Langkah 1

   Buatlah lingkaran dengan pusat O dan jari-jari OP yang diperpanjang hingga titik Q.

2) Langkah 2

   Buatlah busur dengan pusat P yang memotong ruas OP dan PQ di titik A dan B.

3) Langkah 3

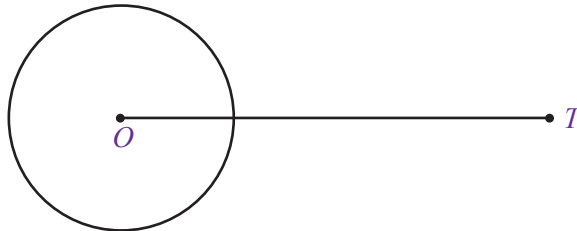
   Buatlah busur dengan pusat A dan B sehingga berpotongan di titik C. Ingat, jari-jarinya harus sama.

4) Langkah 4

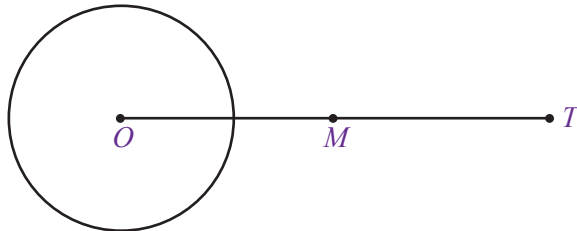
   Hubungkan titik C dan P sehingga membentuk garis CP. Garis inilah yang disebut garis singgung g yang melalui titik P pada lingkaran dengan pusat O.

Ternyata, kita hanya dapat membuat satu buah garis singgung lingkaran di titik P. Hal ini membuktikan sifat garis singgung lingkaran pada bagian sebelumnya.

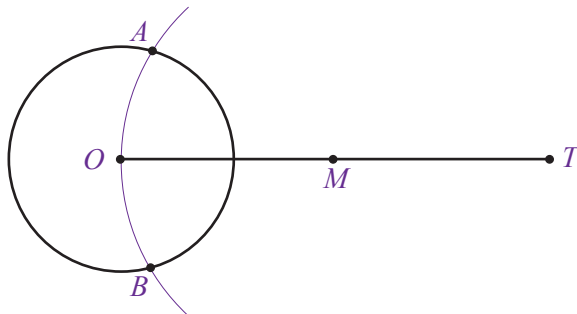
b. Garis Singgung Melalui Titik di Luar Lingkaran

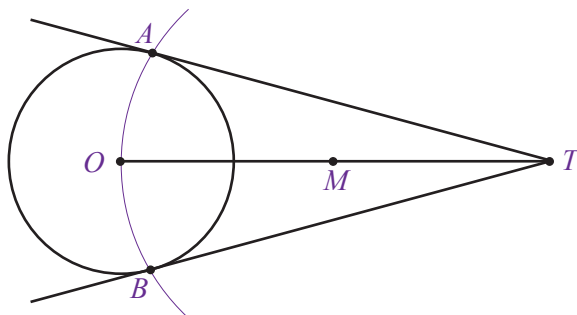
Sekarang, kamu akan melukis garis singgung yang melalui titik di luar lingkaran. Perhatikan langkah-langkah berikut dengan baik.

1) Langkah 1

   Buatlah sebuah lingkaran dengan pusat O. Hubungkan O dengan titik T yang terletak di luar lingkaran.

2) Langkah 2

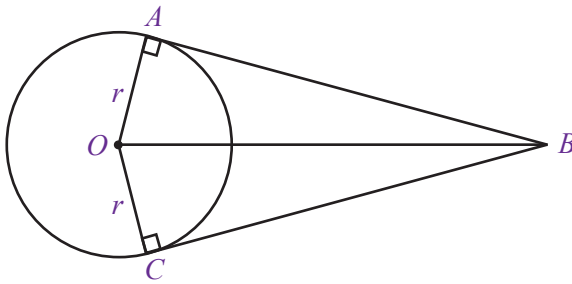
   Bagilah garis OT menjadi dua ruas garis yang sama panjang dengan menempatkan titik M sebagai titik tengah, sehingga $OM = MT$.

3) Langkah 3

   Buatlah busur lingkaran dengan pusat M dan jari-jari OM sehingga memotong lingkaran dengan pusat O di titik A dan B.

4) Langkah 4

   Hubungkan titik A dengan T dan titik B dengan T sehingga diperoleh AT dan BT, yaitu pasangan garis singgung yang melalui titik T.

Ternyata, kamu dapat membuat dua buah garis singgung lingkaran yang melalui titik di luar lingkaran.

3. Panjang Garis Singgung Lingkaran

Setelah melukis garis singgung lingkaran, sekarang kamu akan menghitung panjang garis singgung yang ditarik dari sebuah titik di luar lingkaran.

Perhatikan gambar berikut.

Garis AB dan BC adalah garis singgung lingkaran yang berpusat di titik O. Panjang OA = panjang $OC = r$ = jari-jari lingkaran. Oleh karena garis singgung selalu tegak lurus terhadap jari-jari lingkaran maka panjang garis singgung AB dan BC dapat dihitung dengan menggunakan teorema Pythagoras.

Perhatikan $\Delta\ OAB$ pada . Pada ΔOAB berlaku teorema Pythagoras, yaitu:

$$OA^2 + AB^2 = OB^2$$
$$AB^2 = OB^2 - OA^2$$
$$AB = \sqrt{OB^2 - OA^2}$$
$$AB = \sqrt{OB^2 - r^2}$$

Pada ΔOCB juga berlaku teorema Pythagoras, yaitu:

$$OC^2 + BC^2 = OB^2$$
$$BC^2 = OB^2 - OC^2$$
$$BC = \sqrt{OB^2 - OC^2}$$
$$BC = \sqrt{OB^2 - r^2}$$

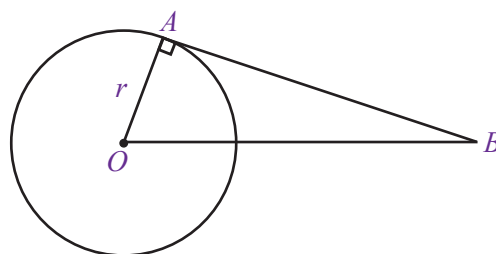
Ternyata, $AB = BC = \sqrt{OB^2 - r^2}$. Uraian tersebut menggambarkan definisi berikut.

> Kedua garis singgung lingkaran yang ditarik dari sebuah titik di luar lingkaran mempunyai panjang yang sama.

Berdasarkan teorema Pythagoras, pada segitiga siku-siku berlaku:
$PQ^2 + QR^2 = PR^2$
atau
$r^2 + p^2 = q^2$

Contoh Soal 7.1

Perhatikan gambar berikut.
Jika diketahui jari-jari lingkaran $r = 6$ cm dan $OB = 10$ cm, tentukan:

a. panjang garis singgung AB,
b. luas ΔOAB.

Jawab :

a. Pada ΔOAB berlaku teorema Pythagoras sehingga

$$AB^2 = OB^2 - r^2$$
$$AB = \sqrt{10^2 - 6^2}$$
$$= \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$$

Jadi, panjang AB adalah 8 cm.

b. Luas $\Delta OAB = \frac{1}{2} \times OA \times AB$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 8$

$= 24$

Jadi, luas ΔOAB adalah 24 cm^2

Uji Kompetensi 7.1

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Lukislah garis singgung lingkaran yang melalui titik di luar lingkaran berikut ini.

   a.

$\bullet$ P

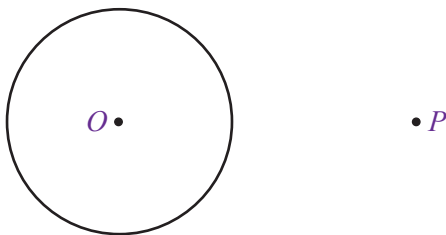
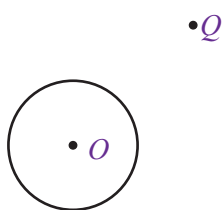
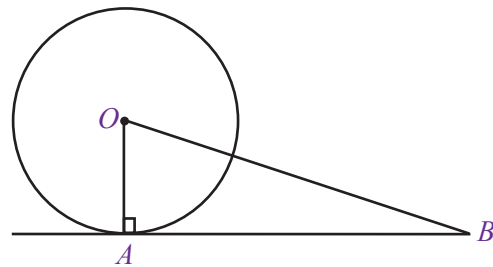
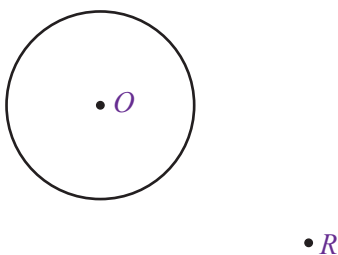
   b.

$\bullet Q$

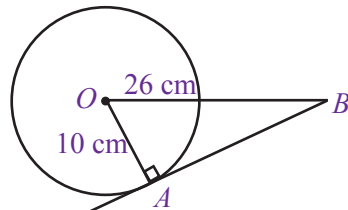
$\bullet$ O

   c.

$\bullet$ R

2. Perhatikan gambar berikut.

   Jari-jari lingkaran 6 cm dan panjang garis singgung AB 8 cm. Tentukan jarak titik pusat O ke titik B.

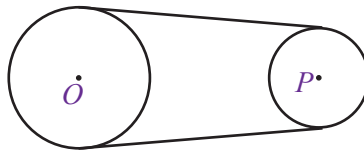
3. Jari-jari lingkaran yang berpusat di titik O adalah 2 cm. Titik T terletak di luar lingkaran dan berjarak 7 cm dari pusat lingkaran. Hitunglah panjang garis singgung lingkaran yang melalui titik T.

4. Perhatikan gambar berikut.

   Hitung panjang garis singgung AB.

5. Sebuah lingkaran yang berpusat di O memiliki jari-jari r. Jarak titik pusat ke titik P yang terletak di luar lingkaran adalah $r + 8$. Jika panjang garis singgung lingkaran yang melalui titik P adalah 12 cm, tentukan panjang jari-jari r dan jarak O ke P

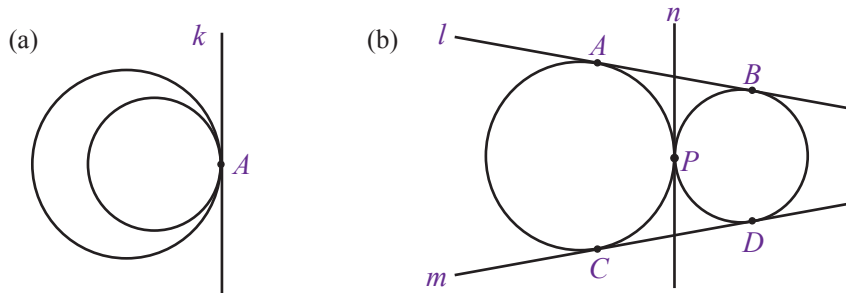
B. Garis Singgung Dua Lingkaran

Kamu tentu sudah sering melihat sepeda. Apabila kamu amati rantai roda sepeda, tampak bahwa rantai itu melilit dua roda bergerigi yang berbeda ukuran. Dua roda bergerigi tersebut dapat dianggap sebagai dua lingkaran dan rantai sepeda sebagai garis singgung persekutuan lingkaran.

Dengan demikian, garis singgung persekutuan dapat diartikan sebagai garis yang tepat menyinggung dua lingkaran.

1. Kedudukan Dua lingkaran

Secara umum, kedudukan dua lingkaran dapat dikelompokkan menjadi tiga jenis, yaitu dua lingkaran bersinggungan, berpotongan, dan saling lepas.

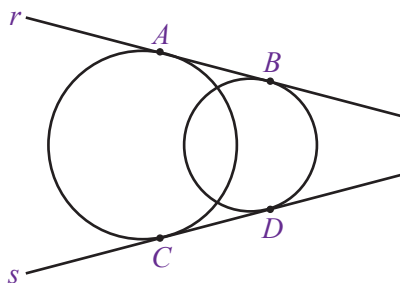
a. Dua Lingkaran Bersinggungan

Perhatikan Gambar 7.3

Gambar 7.3 : Dua lingkaran yang bersinggungan

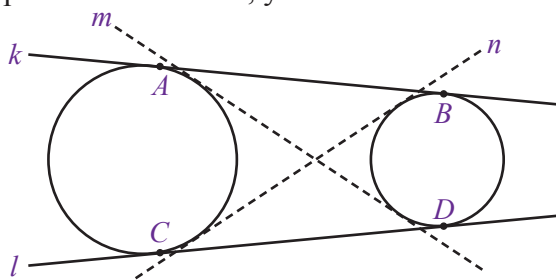
Gambar 7.3(a) memperlihatkan dua lingkaran yang bersinggungan di dalam. Untuk kedudukan seperti ini dapat dibuat satu buah garis singgung persekutan luar, yaitu *k* dengan titik singgung *A*.

Gambar 7.3(b) memperlihatkan dua lingkaran yang bersinggungan di luar. Dalam kedudukan seperti ini dapat dibuat satu buah garis singgung persekutuan dalam, yaitu *n* dan dua garis singgung persekutuan luar, yaitu *l* dan *m*.

b. Dua Lingkaran Berpotongan

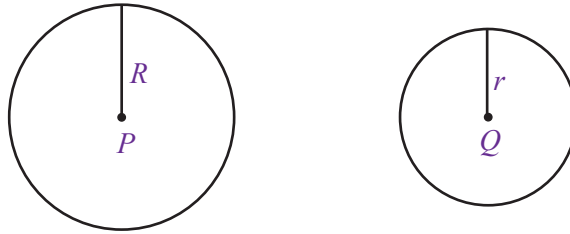
Dua lingkaran yang berpotongan seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 7.4 mempunyai dua garis singgung persekutuan luar, yaitu *r* dan *s*.

Gambar 7.4 : Dua lingkaran yang berpotongan.

c. Dua Lingkaran Saling Lepas

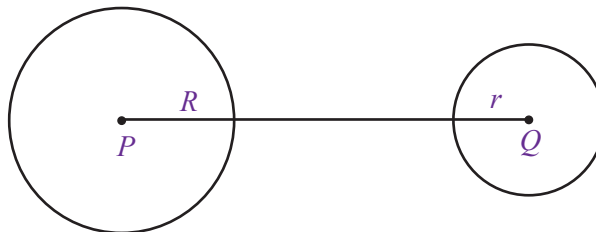
Gambar 7.5 memperlihatkan dua lingkaran yang saling lepas atau terpisah. Dalam kedudukan seperti ini, dapat dibuat dua garis persekutuan luar, yaitu k dan l dan dua garis persekutuan dalam, yaitu m dan n.

Gambar 7.5 : Dua lingkaran yang saling lepas.

2. Garis Singgung Persekutuan Luar

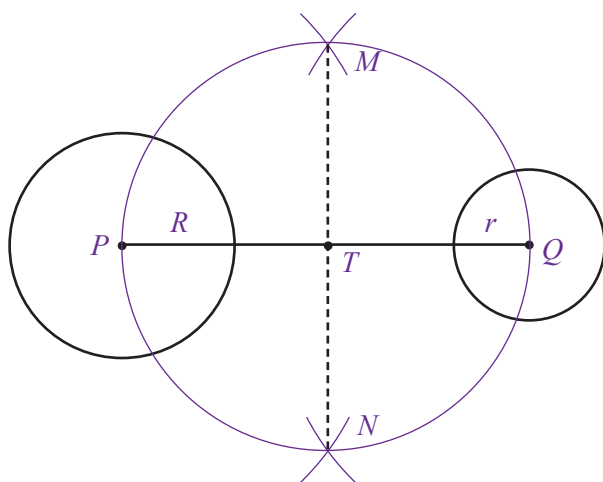
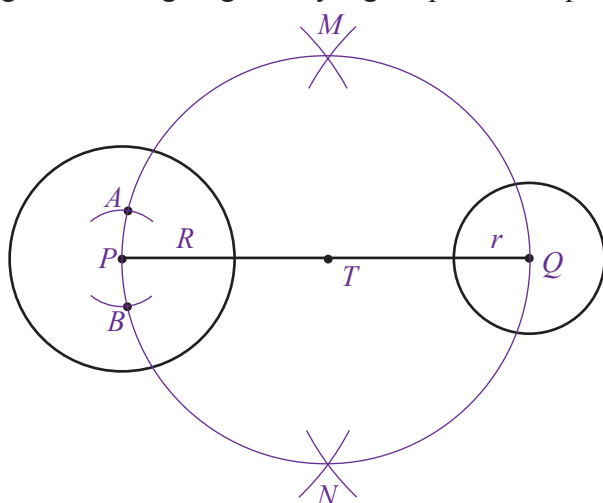
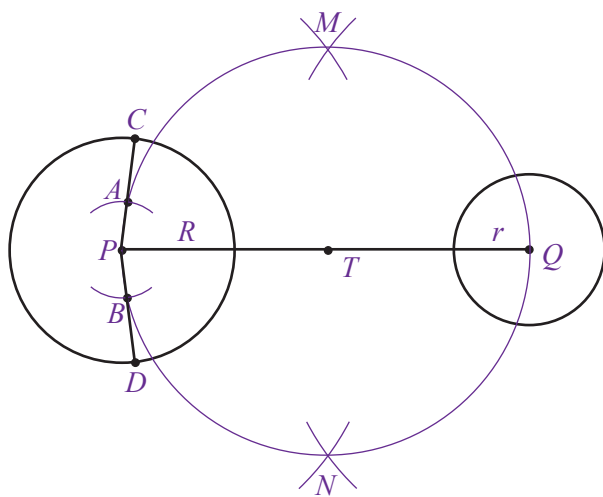
a. Melukis Garis Singgung Persekutuan Luar

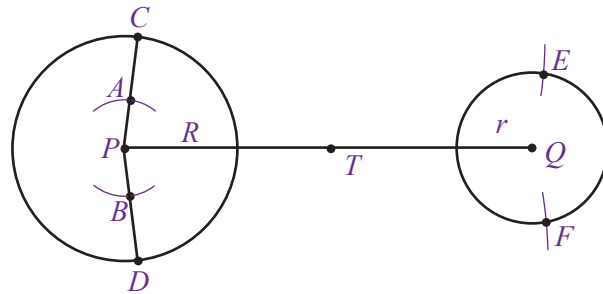
Misalnya terdapat dua lingkaran saling lepas dengan pusat P dan Q serta jari-jari R dan r. Bagaimana cara melukis garis singgung persekutuan luar dari lingkaran P dan Q tersebut? Pelajarilah langkah-langkah berikut.

1) Langkah 1
   Buatlah dua lingkaran dengan pusat P dan Q serta jari-jari R dan r $(r < R)$. Kemudian, hubungkan kedua titik pusatnya.

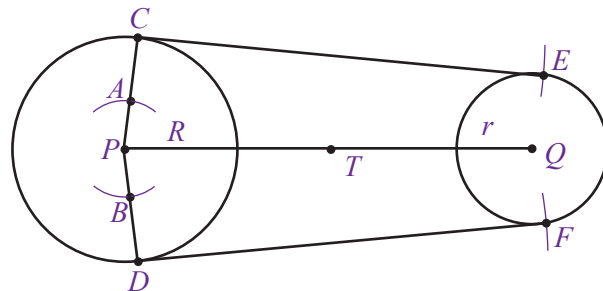
Plus +

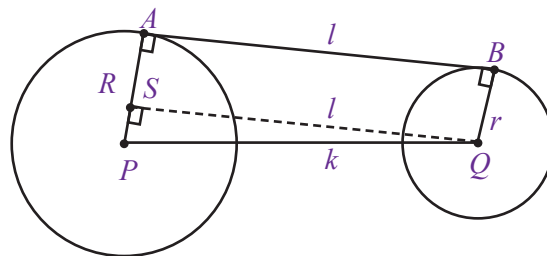
Garis yang menghubungkan pusat lingkaran A dan pusat lingkaran B, yaitu AB disebut garis sentral dari kedua lingkaran tersebut dan merupakan sumbu simetri.

2) Langkah 2
   Buatlah busur lingkaran sebarang yang berpusat di P dan Q dengan jari-jari yang sama dan panjangnya harus lebih besar dari PQ, sehingga berpotongan di titik M dan N.

3) Langkah 3
   Hubungkan M dan N sehingga memotong PQ di titik T.

4) Langkah 4
   Gambar lingkaran yang berpusat di titik T dengan jari-jari PT.

5) Langkah 5
   Lukislah busur lingkaran yang berpusat di titik P dengan jari-jari $R - r$ sehingga memotong lingkaran yang berpusat di T pada titik A dan B.

6) Langkah 6
   Hubungkan P dengan A dan P dengan B, kemudian perpanjang kedua garis tersebut sehingga memotong lingkaran yang berpusat di P pada titik C dan D.

7) Langkah 7

Lukislah busur lingkaran dengan pusat di C dan jari-jari AQ sehingga memotong lingkaran yang berpusat di Q di titik E. Lukislah busur lingkaran dengan pusat di D dan jari-jari AQ sehingga memotong lingkaran yang berpusat di Q di titik F.

8) Langkah 8

Langkah terakhir adalah menghubungkan C dengan E dan D dengan F. Garis CE dan DF adalah garis singgung persekutuan luar dua lingkaran yang berpusat di P dan Q.

b. Menghitung Panjang Garis Singgung Persekutuan Luar

Perhatikan gambar berikut ini.

- Garis AB merupakan garis singgung persekutuan luar dua lingkaran yang berpusat di P dan Q.
- $R = AP$ adalah jari-jari lingkaran yang berpusat di P atau lingkaran pertama.

  $r = BQ$ adalah jari-jari lingkaran yang berpusat di Q atau lingkaran kedua.
- l adalah panjang garis singgung persekutuan luar AB.
- k adalah jarak antara kedua titik pusat P dan Q.
- SQ merupakan translasi dari AB, sehingga panjang AB = panjang SQ = l. Panjang $SP = AP - BQ = R - r$.
- AB sejajar SQ sehingga – BAP = – QSP = 90˚ (sehadap)

Plus +

Jika garis sejajar dipotong oleh sebuah garis lain maka pasangan sudut-sudut yang sehadap sama besar

- Sekarang, perhatikan ΔSPQ. Oleh karena – QSP = 90˚ maka kita bisa menggunakan teorema Pythagoras untuk mencari panjang SQ.
  ΔSPQ siku-siku di S sehingga

$$PQ^2 = SQ^2 + SP^2$$
$$SQ^2 = PQ^2 - SP^2$$
$$l^2 = k^2 - (R - r) \; ; R > r$$
$$l = \sqrt{k^2 - (R - r)^2}$$

Jadi, panjang garis singgung persekutuan luar dua lingkaran adalah:

$$l = \sqrt{k^2 - (R - r)^2} \text{ , untuk } R > r$$

dengan: l = panjang garis singgung persekutuan luar
k = jarak kedua titik pusat lingkaran
R = jari-jari lingkaran pertama
r = jari-jari lingkaran kedua

Contoh Soal 7.2

Pada gambar di samping, AB adalah garis singgung persekutuan luar dua lingkaran yang berpusat di P dan Q. Hitunglah panjang AB.

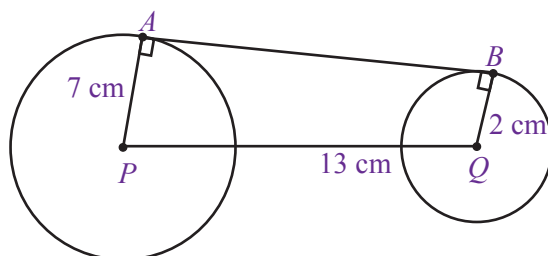
Jawab :
Dari gambar diperoleh:
jarak kedua titik pusat lingkaran, k = 17 cm,
panjang jari-jari lingkaran pertama, R = 25 cm,
panjang jari-jari lingkaran kedua, r = 17 cm,
panjang garis singgung persekutuan luar = l.

$$l = \sqrt{k^2 - (R - r)^2}$$
$$= \sqrt{17^2 - (25 - 17)^2}$$
$$= \sqrt{17^2 - 8^2}$$
$$= \sqrt{289 - 64} = 15 \text{ cm}$$

Jadi, panjang garis singgung l adalah 15 cm

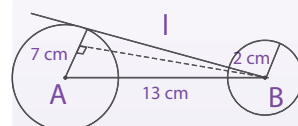
Contoh Soal 7.3

Pada gambar di samping, lingkaran O berjari-jari 7 cm dan lingkaran P berjari-jari 5 cm. Tentukan panjang garis singgung persekutuan luar AB.

Jawab :
Dari soal diketahui:
$AO = R = 7$ cm
$BP = r = 5$ cm
Kedua lingkaran bersinggungan di luar sehingga jarak kedua titik pusat lingkaran adalah.

Solusi Matematika

Diketahui dua buah lingkaran dengan pusat A dan B dengan panjang jari-jari masing-masing 7 cm dan 2 cm. Jika jarak AB = 13 cm maka panjang garis singgung persekutuan luar kedua lingkaran tersebut adalah ....

a. 5 cm
b. 6 cm
c. 12 cm
d. 15 cm

Jawab:
Kedua lingkaran pada soal dapat digambarkan sebagai berikut.

R = 7 cm
r = 2 cm
k = 13 cm
Panjang garis singgung persekutuan luar kedua lingkaran (l) *adalah*

$$l = \sqrt{k - (R - r)^2}$$
$$= \sqrt{13^2 - (7 - 2)^2}$$
$$= \sqrt{13^2 - 5^2}$$
$$= \sqrt{169 + 25}$$
$$= \sqrt{144}$$
$$= 12$$

Jawaban: c

Soal UN, 2007

Plus +

Pada bentuk akar berlaku sifat:

$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$;

$a \geq 0$ dan $b \geq 0$

$$
\begin{aligned}
OP &= R + r \\
&= 7 + 5 = 12 \text{ cm maka} \\
AB &= \sqrt{(OP)^2 - (R-r)^2} \\
&= \sqrt{12^2 - (7-5)^2} \\
&= \sqrt{12^2 - 2^2} \\
&= \sqrt{144 - 4} = \sqrt{140} \\
&= 2\sqrt{35}
\end{aligned}
$$

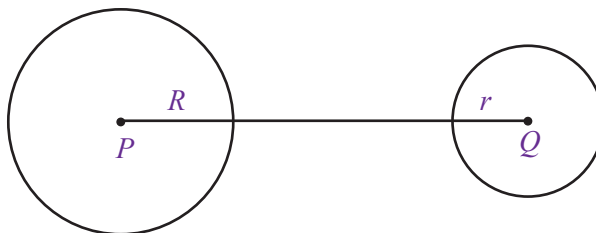
Jadi, panjang garis singgung AB adalah $2\sqrt{35}$ cm

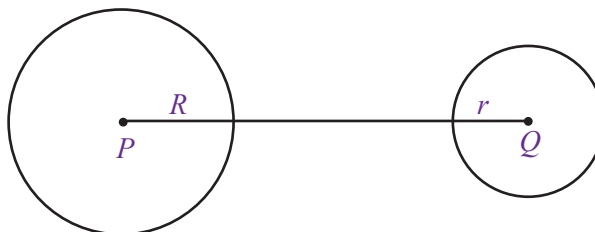
3. Garis Singgung Persekutuan Dalam

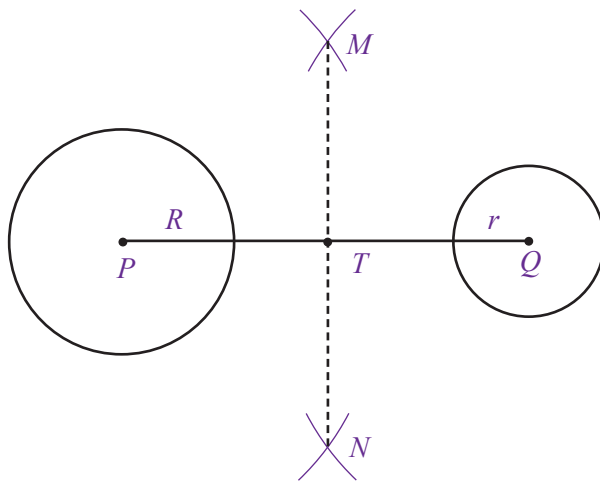
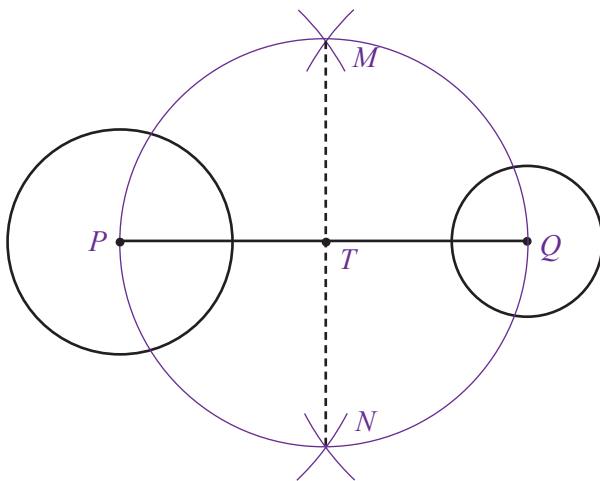
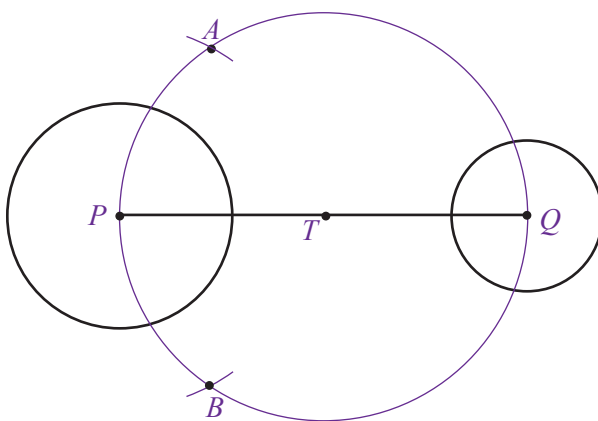
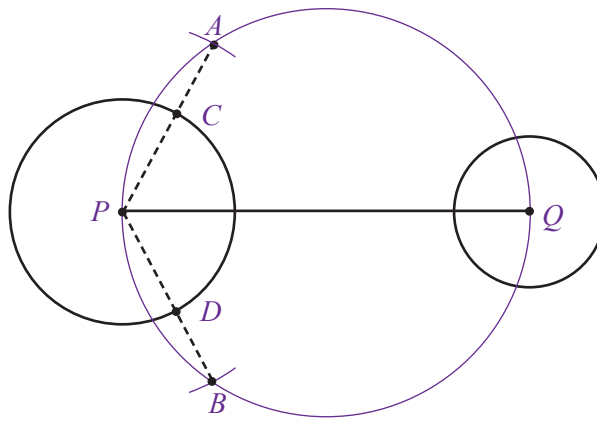
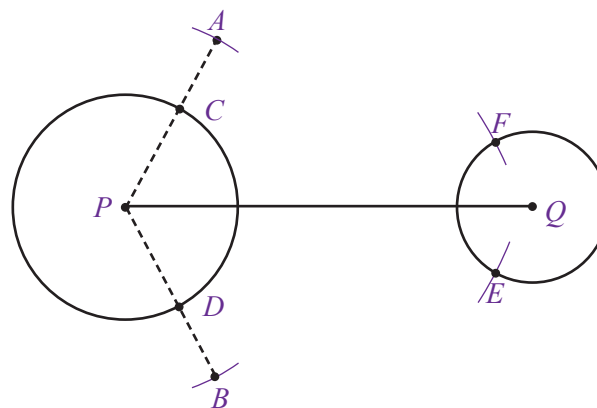
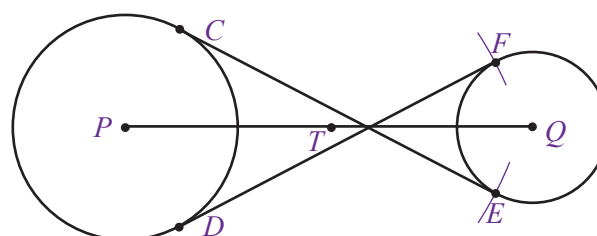
a. Melukis Garis Singgung Persekutuan Dalam

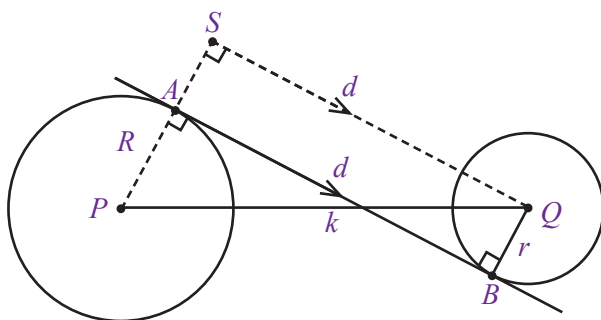
Perhatikan langkah-langkah melukis garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran berikut ini.

1) Langkah 1

   Lukislah dua lingkaran dengan pusat P dan Q serta jari-jari masing-masing R dan r ($r < R$), kemudian hubungkan kedua titik pusatnya.

2) Langkah 2

   Buatlah busur lingkaran yang berpusat di P dan Q dengan jari-jari yang panjangnya sama dan harus lebih besar dari $\frac{1}{2}$ PQ sehingga berpotongan di titik M dan N.

3) *Langkah 3*

   Hubungkan M dan N sehingga memotong PQ di titik T.

4) Langkah 4
Lukislah lingkaran yang berpusat di T dengan jari-jari PT.

5) Langkah 5
Lukislah busur lingkaran yang berpusat di P dan berjari-jari $R + r$ sehingga memotong lingkaran yang berpusat di T pada titik A dan B.

6) Langkah 6
Hubungkan titik pusat P dengan A dan P dengan B sehingga memotong lingkaran dengan pusat P di titik C dan D.

7) Langkah 7
   - Lukislah busur lingkaran dari C dengan jari-jari AQ sehingga memotong lingkaran yang berpusat di Q pada titik E.
   - Lukislah busur lingkaran dari D dengan jari-jari AQ sehingga memotong lingkaran yang berpusat di Q pada titik F.

8) Langkah 8
   Terakhir, hubungkan C dengan E dan D dengan F. Garis CE dan DF adalah garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran yang berpusat di P dan Q.

b. Menghitung Panjang Garis Singgung Persekutuan Dalam

Perhatikan gambar berikut ini.

- Garis AB merupakan garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran yang berpusat di P dan di Q.
- $R = AP$ adalah jari-jari lingkaran yang berpusat di P atau lingkaran pertama dan $r = BQ$ adalah jari-jari lingkaran yang berpusat di Q atau lingkaran kedua. $PS = AS + AP = BQ + AP = r + R = R + r$.
- d adalah panjang garis singgung persekutuan dalam AB.
- k adalah jarak antara kedua titik pusat P dan Q.
- SQ merupakan translasi dari AB, sehingga SQ sejajar AB dan panjang SQ = panjang $AB = d$.
- Oleh karena SQ sejajar AB maka $\angle PSQ = \angle PAB = 90^\circ$.
- Sekarang perhatikan ΔPSQ.

Oleh karena ΔPSQ merupakan segitiga siku-siku dengan $\angle PSQ = 90^\circ$ maka kita bisa menggunakan teorema Pythagoras untuk mencari panjang SQ.

$$PQ^2 = PS^2 + SQ^2$$
$$SQ^2 = PQ^2 - PS^2$$
$$d^2 = k^2 - (R + r)^2$$
$$d = \sqrt{k^2 - (R + r)^2}$$

Jadi, panjang garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran adalah

$$d = \sqrt{k^2 - (R + r)^2}$$

dengan:

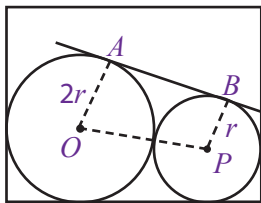
d = panjang garis singgung persekutuan dalam
k = jarak kedua titik pusat lingkaran
R = jari-jari lingkaran pertama
r = jari-jari lingkaran kedua

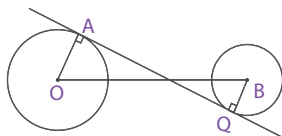
Tugas 7.1

Pernahkah kamu melihat gerhana bulan? Tahukah kamu saat terjadi gerhana bulan, posisi antara Matahari dan Bumi ini membentuk dua garis singgung persekutuan. Sekarang, carilah informasi (gambar) mengenai kedudukan Matahari dan bumi saat terjadi gerhana bulan. Kemudian, coba kamu hitung panjang garis singgung persekutuan itu

Contoh Soal 7.4

Diketahui dua lingkaran dengan jari-jari 14 cm dan 4 cm. Tentukan panjang garis singgung persekutuan dalam kedua lingkaran tersebut jika jarak antara kedua titik pusatnya adalah 30 cm.

Problematika

Hitunglah keliling dan luas persegipanjang jika diketahui panjang garis singgung persekutuan luar *AB* = $3\sqrt{2}$ cm.

Solusi Matematika

Panjang *PQ* = 20 cm, *AB* = 25 cm, dan *AP* = 9 cm. Perbandingan luas lingkaran yang berpusat di A dengan luas lingkaran yang berpusat di B adalah ....

a. 3 : 2
b. 5 : 3
c. 9 : 4
d. 9 : 7

Jawab:

$PQ = \sqrt{AB^2 - (AP + BQ)^2}$

$PQ^2 = AB^2 - (AP + BQ)^2$

$20^2 = 25^2 - (9 + BQ)^2$

$400 = 625 - (9 + BQ)^2$

$(9 + BQ)^2 = 15$

$BQ = 6$

LA : LB

$pr_A^2 : pr_B^2$

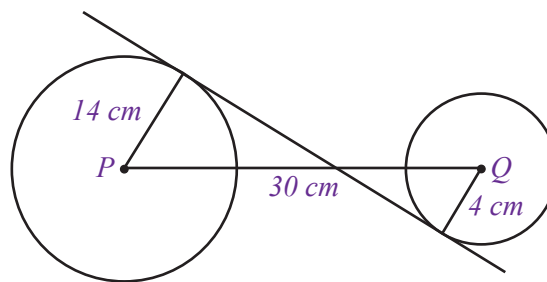
$p9^2 : p6^2$

81p : 36p

9:4

Jawaban: c

Soal UAN, 2003

Jawab :
Soal tersebut dapat disajikan dalam gambar berikut.

Diketahui k = 30 cm
R = 14 cm
r = 4 cm

sehingga $d = \sqrt{k^2 - (R+r)^2}$

$= \sqrt{30^2 - (14+4)^2}$

$= \sqrt{30^2 - 18^2}$

$= \sqrt{900 - 324}$

$= \sqrt{576}$

$= 24$

Jadi, panjang garis singgung persekutuan dalamnya adalah 24 cm

Contoh Soal 7.5

Panjang garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran adalah 15 cm dan kedua titik pusatnya terpisah sejauh 17 cm. Jika panjang jari-jari salah satu lingkaran adalah 3 cm, tentukan panjang jari-jari lingkaran yang lain.

Jawab :
Panjang garis singgung persekutuan dalam adalah 15 cm maka d = 15 cm.
Jarak kedua titik pusatnya adalah 17 cm maka k = 17 cm.
Panjang jari-jari (R) salah satu lingkaran adalah 3 cm maka R = 3 cm.

$d = \sqrt{k^2 - (R+r)^2}$

$15 = \sqrt{17^2 - (3+r)^2}$

$15^2 = 17^2 - (3 + r)^2$

$225 = 289 - (3 + r)^2$

$(3 + r)^2 = 289 - 225$

$(3 + r)^2 = 64$

$3 + r = 8$

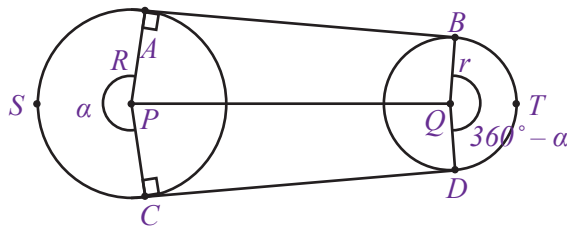
$r = 8 - 3$

$r = 5$

Jadi, panjang jari-jari yang lain adalah 5 cm

4. Panjang Sabuk Lilitan Minimal yang menghubungkan Dua Lingkaran

Pernahkah kamu mengganti rantai roda sepedamu? Bagaimana kamu menentukan agar panjang rantai yang diperlukan tidak terlalu panjang atau terlalu pendek?

Jika kamu perhatikan, dua roda gigi sepeda biasa dianggap sebagai dua lingkaran dan rantai yang melilitnya sebagai garis singgung persekutuan luar. Perhatikan gambar berikut ini.

Jika α° menyatakan besar sudut yang menghadap busur ASC maka besar sudut yang menghadap busur BTD adalah $360^\circ - \alpha^\circ$. Kenapa demikian? Tahukah kamu alasannya?

Berdasarkan uraian di atas, dapat dihitung panjang sabuk lilitan minimal untuk menghubungkan dua lingkaran.

Oleh karena $AB = CD$ maka

$$\text{Panjang sabuk lilitan minimal} = 2AB + \overset{\frown}{ASC} + \overset{\frown}{BTD}$$

Dengan, $AB = \sqrt{(PQ)^2 - (R - r)^2}$

$$\overset{\frown}{ASC} = \frac{a^\circ}{360^\circ} \times 2\pi R$$

$$\overset{\frown}{BTD} = \frac{360^\circ - a^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$$

Problematika

Gambar berikut ini adalah penampang sepuluh buah paralon yang akan diikat dengan menggunakan tali. Berapakah panjang tali terpendek agar dapat mengikat paralon-paralon itu jika diameter paralon 21 cm?

Contoh Soal 7.6

Dua buah pipa air dengan jari-jari yang sama, yaitu 21 cm akan diikat menggunakan seutas kawat. Berapa panjang kawat minimal yang dibutuhkan?

Jawab :

Jari-jari = 21 cm sehingga $R = r = 21$ cm

$PQ = RS = AB$ dan $\overset{\frown}{PS} = \overset{\frown}{QR}$

maka panjang kawat minimal untuk mengikat dua pipa air, misalkan x, adalah

$$\begin{aligned} x &= 2AB + 2\overset{\frown}{PS} \\ &= 2 \times (21 + 21) + 2 \times \left[\frac{180^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21\right] \\ &= 2 \times 42 + 2 \times \left[\frac{1}{2} \times 2 \times 22 \times 3\right] \\ &= 84 + 132 \\ &= 216 \end{aligned}$$

Jadi, panjang kawat terpendek yang diperlukan adalah 216 cm

Contoh Soal 7.7

Gambar di samping menunjukkan penampang 3 buah paralon yang terikat rapat oleh seutas tali. Jika ketiga paralon tersebut memiliki ukuran jari-jari yang sama, yaitu 14 cm, hitunglah panjang tali pengikatnya.

Jawab :

Jari-jari = r = 14 cm.

$PQ = RS = TU = MN = NO = MO = 2r = 2 \times 14 = 28$ cm

ΔMNO sama sisi, sehingga $\angle MNO = \angle MON$ $\angle OMN = 60^\circ$

$\angle QNR = \angle SOT = \angle PMU = 360^\circ \angle(\angle MNQ + \angle MNO + \angle RNO)$

$= 360^\circ \angle(90^\circ + 60^\circ + 90^\circ)$

$= 360^\circ \angle 240^\circ = 120^\circ$

$\overset{\frown}{QR} = \overset{\frown}{ST} = \overset{\frown}{PU} = \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 2 p$ r

$= \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 14 = \frac{88}{3}$ cm

sehingga

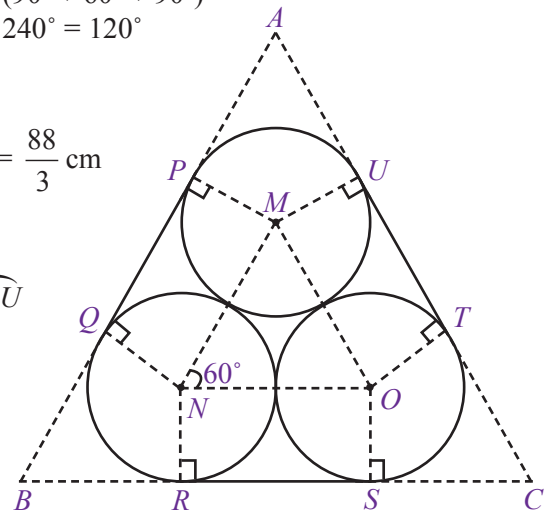
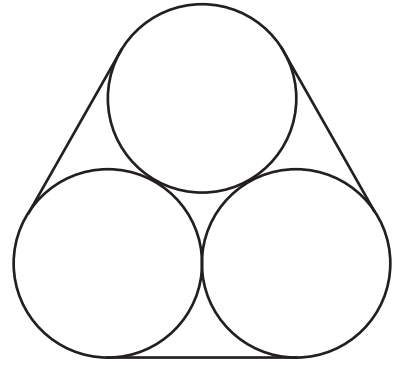
x = panjang tali pengikat paralon

$= PQ + RS + TU + \overset{\frown}{QR} + \overset{\frown}{ST} + \overset{\frown}{PU}$

$= 3PQ + 3\overset{\frown}{QR}$

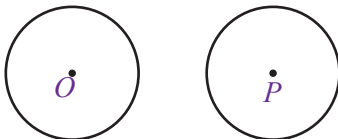
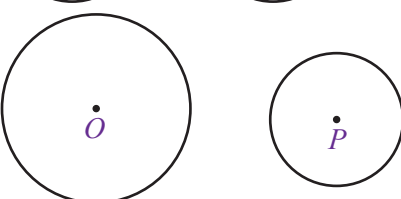
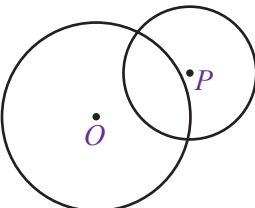
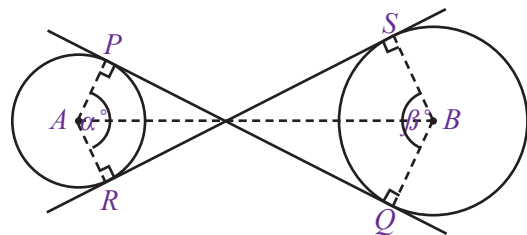
$= 3 \times 28 + 3 \times \frac{88}{3}$

$= 84 + 88 = 172$

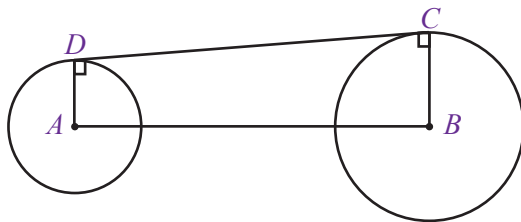
Jadi, panjang tali pengikat paralon tersebut adalah 172 cm

Uji Kompetensi 7.2

Kerjakanlah soal-soal berikut.

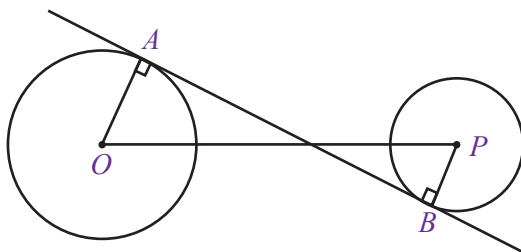
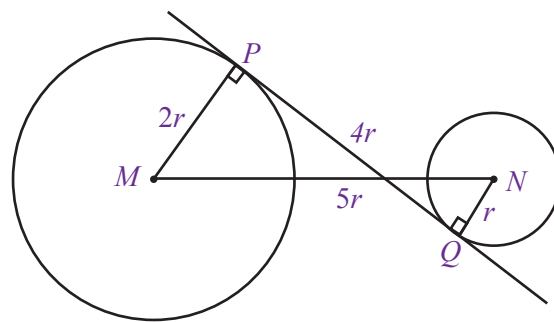
1. Lukislah garis singgung persekutuan luar dan garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran berikut ini.

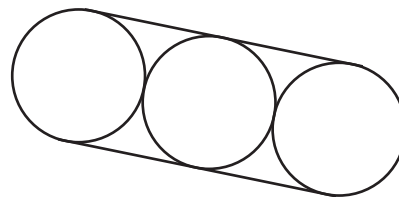
   a.

   b.

   c.

2. Perhatikan gambar berikut ini.

   Berdasarkan pengamatanmu, jawablah benar atau salah pernyataan-pernyataan berikut.

   a. AP sejajar BQ
   b. panjang PQ = panjang RS
   c. $PQ \perp RS$
   d. AB adalah sumbu simetri bangun tersebut
   e. $\alpha^\circ = \beta^\circ$

3. Perhatikan gambar berikut ini.

Panjang $AB = 25$ cm, $AD = 4$ cm, dan $BC = 11$ cm. Berapakah panjang CD?

4. Dua lingkaran masing-masing berjari-jari 8 cm dan 7 cm. Jarak terdekat kedua sisi lingkaran adalah 10 cm. Tentukan panjang garis singgung persekutuan luar dua lingkaran tersebut.

5. Dua lingkaran masing-masing berpusat di titik O dan P dengan panjang jari-jari 10 cm dan 6 cm. Jika jarak kedua titik pusat lingkaran adalah 34 cm, tentukan panjang garis singgung AB.

6. Perhatikan gambar berikut.

Panjang $MP = 2r$, $PQ = 4r$, dan $MN = 5r$. Jika $r = 2$ cm, tentukan jarak antara kedua titik pusat lingkaran dan panjang garis singgung persekutuan dalam kedua lingkaran tersebut.

7. Tiga buah pipa paralon, akan diikat seperti tampak pada gambar di bawah. Jika jari-jari ketiga paralon tersebut sama, yaitu 10 cm, tentukan panjang tali minimal yang diperlukan untuk mengikat paralon tersebut.

C. Lingkaran Luar dan Lingkaran Dalam Segitiga

Pada subbab terakhir ini, kamu akan mempelajari tentang lingkaran yang dikaitkan dengan segitiga, yaitu lingkaran luar dan lingkaran dalam suatu segitiga.

1. Lingkaran Luar Segitiga

a. Pengertian Lingkaran Luar Segitiga

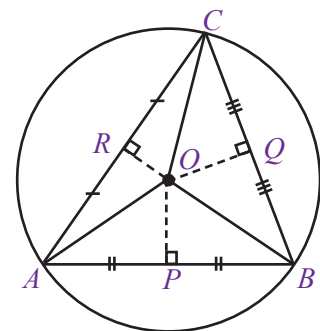
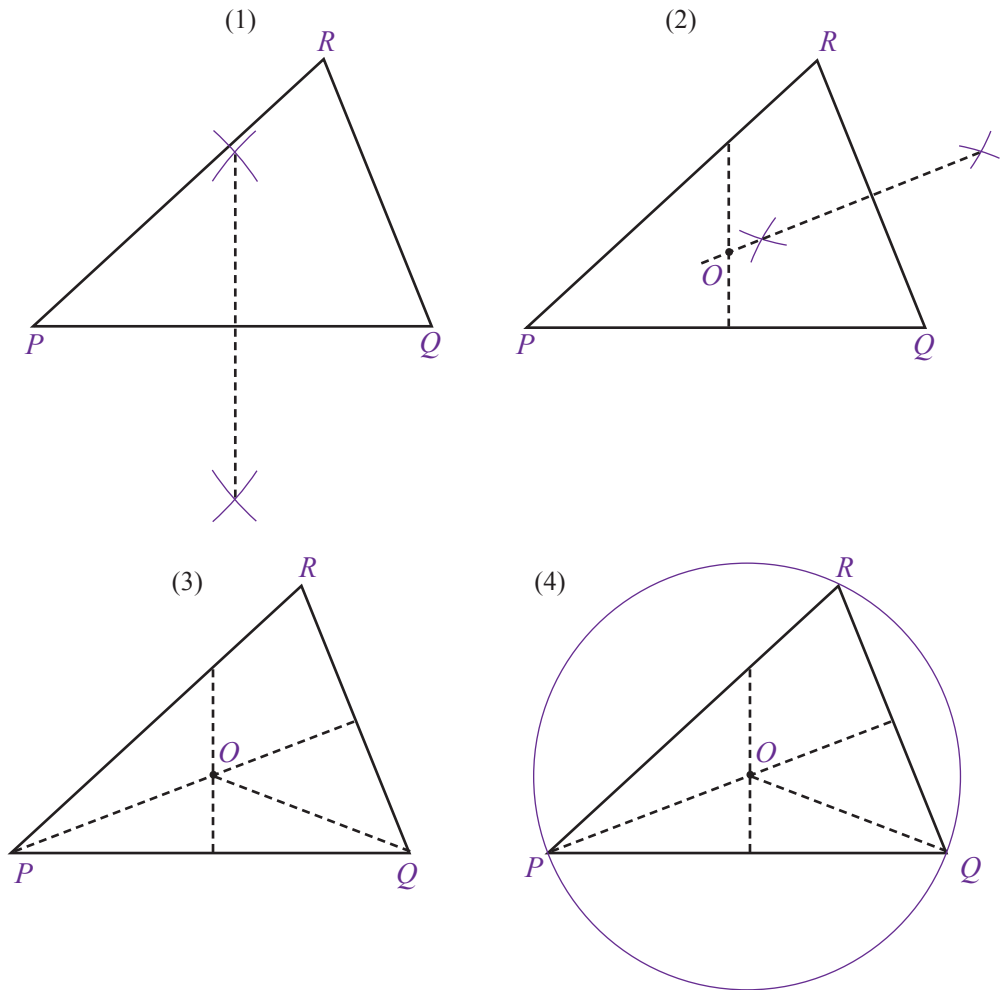
Lingkaran luar suatu segitiga adalah suatu lingkaran yang melalui semua titik sudut segitiga dan berpusat di titik potong ketiga garis sumbu sisi-sisi segitiga.

Gambar di samping menunjukkan lingkaran luar ΔABC dengan pusat O. $OA = OB = OC$ adalah jari-jari lingkaran dan $OP = OQ = OR$ adalah garis sumbu sisi-sisi segitiga.

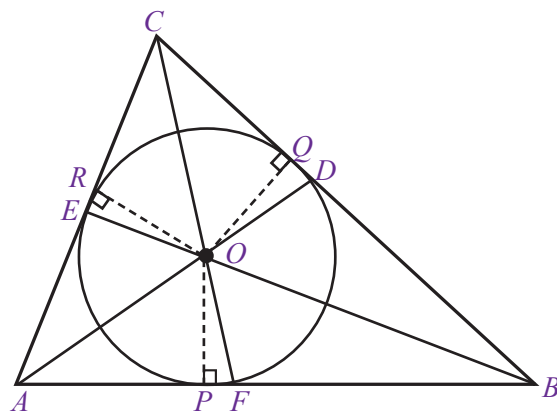
b. Melukis Lingkaran Luar Segitiga

Telah disebutkan sebelumnya bahwa titik pusat lingkaran luar suatu segitiga adalah titik potong ketiga garis sumbu sisi-sisinya. Oleh karena itu, untuk dapat melukis lingkaran luar segitiga, kamu harus melukis dulu garis sumbu ketiga sisi segitiga tersebut.

Perhatikan langkah-langkah berikut.

1) Lukislah sebuah segitiga sebarang, misalnya ΔPQR. Kemudian, lukislah garis sumbu PQ.
2) Lukislah garis sumbu QR sehingga memotong garis sumbu PQ di titik O.

3) Hubungkan O dan Q.
4) Lukislah lingkaran dengan jari-jari PQ dan berpusat di O. Lingkaran tersebut merupakan lingkaran luar ΔPQR.

2. Lingkaran Dalam Segitiga

a. Pengertian Lingkaran Dalam Segitiga

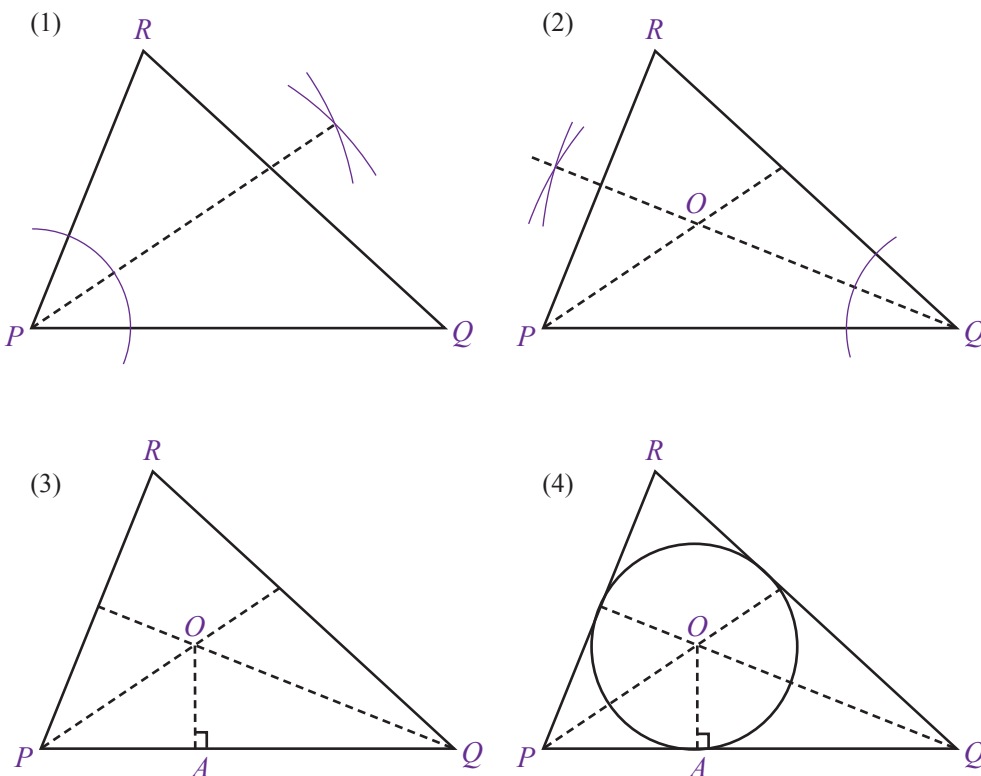
Lingkaran dalam suatu segitiga adalah lingkaran yang berada di dalam segitiga dan menyinggung semua sisi segitiga tersebut. Titik pusat lingkaran merupakan titik potong ketiga garis bagi sudut segitiga. Gambar berikut menunjukkan lingkaran dalam ΔABC dengan pusat O. Diketahui $OP = OQ = OR$ adalah jari-jari lingkaran. Adapun AD, BE, dan EF adalah garis bagi sudut segitiga.

b. Melukis Lingkaran Dalam Segitiga

Jika titik pusat lingkaran dalam segitiga adalah titik potong ketiga garis bagi sudut segitiga tersebut maka hal pertama yang harus kamu lakukan adalah menentukan titik pusatnya. Kamu tentu masih ingat bagaimana cara melukis garis bagi sudut segitiga, bukan? Materi tersebut telah kalian pelajari di Kelas VII.

Agar lebih jelas, perhatikan langkah-langkah melukis lingkaran dalam segitiga, sebagai berikut.

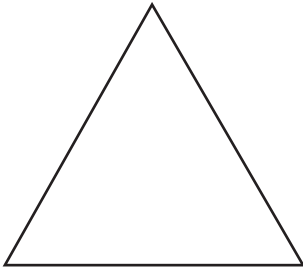
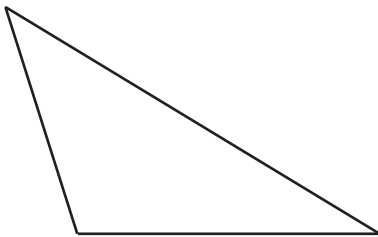
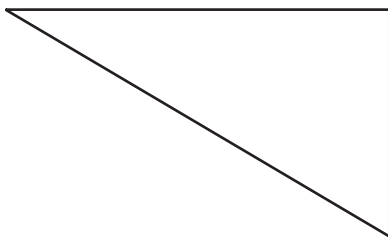
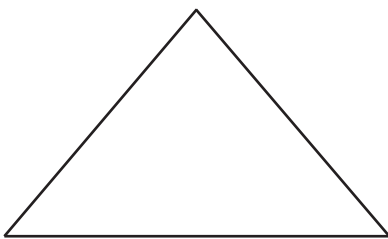
1) Lukislah sebuah segitiga sebarang, misalkan ΔPQR. Kemudian, lukislah garis bagi $\angle P$.
2) Lukislah garis bagi $\angle Q$ sehingga memotong garis bagi $\angle P$ di titik O.
3) Jari-jari diperoleh dengan cara menarik garis tegak lurus dari titik O ke salah satu sisi segitiga. Misalnya OA, tegak lurus PQ.
4) Lukislah lingkaran dengan jari-jari OA dan berpusat di titik O. Lingkaran tersebut merupakan lingkaran dalam ΔPQR.

Plus +

Garis bagi segitiga adalah garis yang membagi setiap sudut pada segitiga menjadi dua sudut yang sama besar.

Uji Kompetensi 7.3

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Lukislah lingkaran luar dan lingkaran dalam segitiga-segitiga berikut ini.

   a.

   b.

   c.

   d.

2. Lukislah lingkaran yang melalui titik-titik berikut ini.

   a.

A B

   b.

N

M

   c.

R

Q

P

   d.

K L

M

Rangkuman

1. Garis singgung lingkaran adalah garis yang memotong lingkaran tepat di satu titik yang disebut titik singgung lingkaran.
2. Setiap garis singgung lingkaran selalu tegak lurus terhadap jari-jari (diameter) yang melalui titik singgungnya.
3. Dari satu titik pada lingkaran hanya dapat dibuat satu garis singgung.
4. Dari satu titik di luar lingkaran dapat dibuat dua garis singgung lingkaran.
5. Garis singgung persekutuan adalah garis yang tepat menyinggung dua lingkaran.
6. Dari dua lingkaran yang saling lepas dapat dibuat dua garis singgung persekutuan luar dan dua garis singgung persekutuan dalam.
7. Panjang garis singgung persekutuan luar (l) dan garis singgung persekutuan dalam (d) dapat dicari dengan:

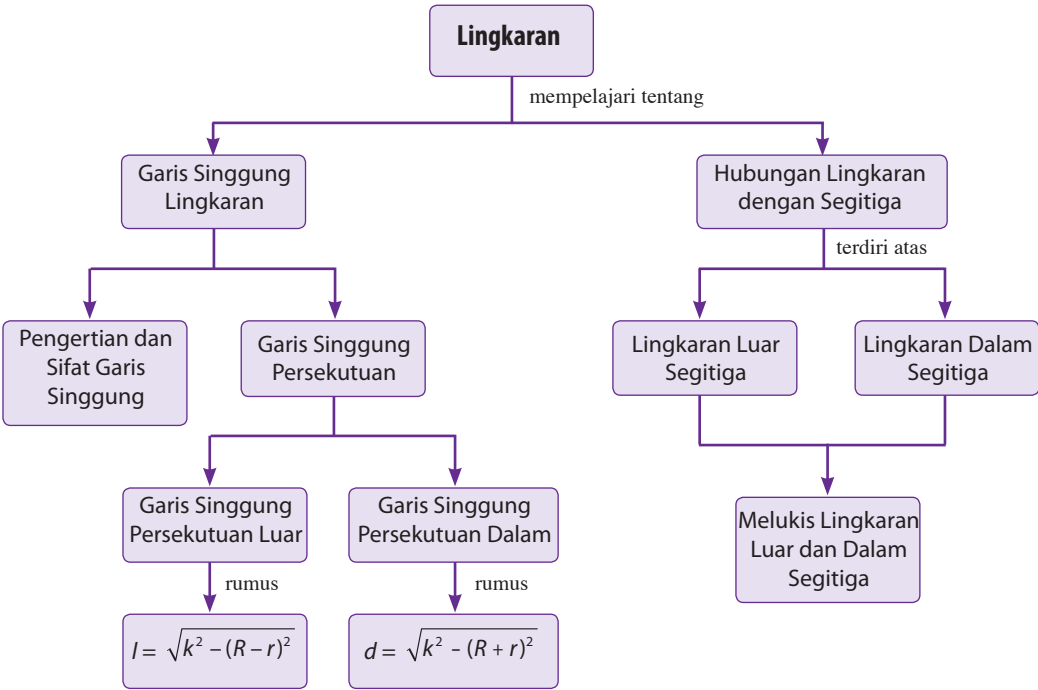
   $$\mathrm{l} = \sqrt{k^2 - (R+r)^2}$$
   $$\mathrm{d} = \sqrt{k^2 - (R+r)^2}$$

   di mana:
   l = panjang garis singgung persekutuan luar
   d = panjang garis singgung persekutuan dalam
   k = jarak kedua titik pusat lingkaran
   R = jari-jari lingkaran pertama
   r = jari-jari lingkaran kedua
8. Lingkaran luar segitiga adalah lingkaran yang melalui semua titik sudut segitiga dan berpusat di titik potong ketiga garis sumbu sisi-sisi segitiga.
9. Lingkaran dalam suatu segitiga adalah lingkaran yang berada di dalam segitiga dan menyinggung semua sisi segitiga dan berpusat di titik potong ketiga garis bagi sudut segitiga.

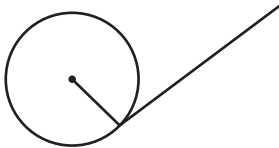
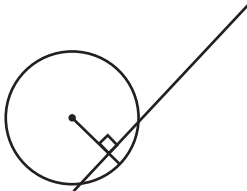
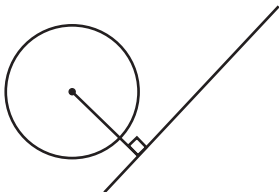
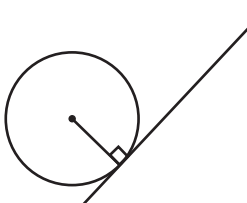
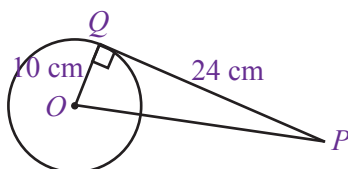
Refleksi

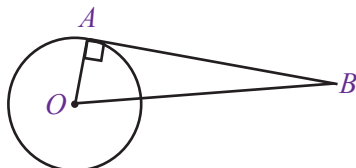
- Pada bab Garis Singgung Lingkaran ini, menurutmu bagian mana yang paling menarik untuk dipelajari?
- Setelah mempelajari bab ini, apakah kamu merasa kesulitan memahami materi tertentu? Materi apakah itu?
- Kesan apakah yang kamu dapatkan setelah mempelajari materi bab ini?

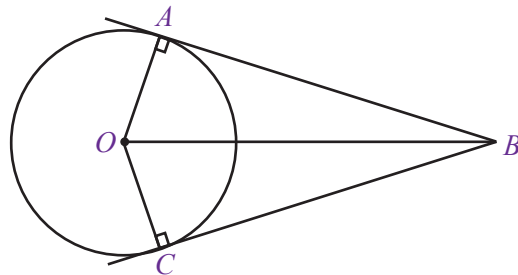
Peta Konsep

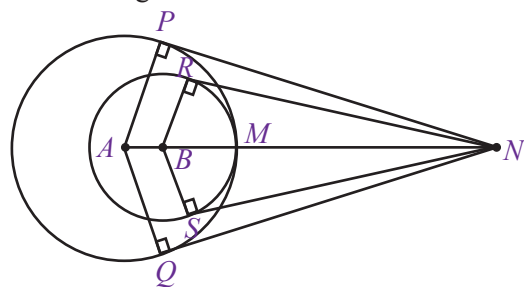
Lingkaran
mempelajari tentang
Garis Singgung Lingkaran
Hubungan Lingkaran dengan Segitiga
Pengertian dan Sifat Garis Singgung
Garis Singgung Persekutuan
terdiri atas
Lingkaran Luar Segitiga
Lingkaran Dalam Segitiga
Garis Singgung Persekutuan Luar
Garis Singgung Persekutuan Dalam
Melukis Lingkaran Luar dan Dalam Segitiga
rumus
rumus
$l = \sqrt{k^2 - (R - r)^2}$
$d = \sqrt{k^2 - (R + r)^2}$

Uji Kompetensi Bab 7

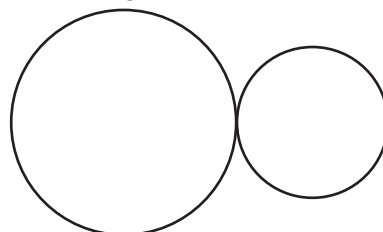
A. Pilihlah satu jawaban yang benar.

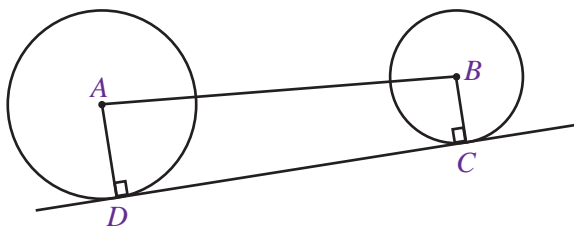
1. Garis di bawah ini yang merupakan garis singgung lingkaran adalah ....
   a.

   b.

   c.

   d.

2. Perhatikan gambar berikut.

   Panjang OP adalah ....
   a. 16 cm
   b. 26 cm
   c. 34 cm
   d. 36 cm

3.

   Pada gambar, panjang jari-jari OA = 10 cm dan jarak OB = 26 cm. Luas ΔOAB adalah ....
   a. 120 cm^2
   b. 140 cm^2
   c. 160 cm^2
   d. 180 cm^2

4. Perhatikan gambar berikut

   Jika panjang OA = 2 cm dan panjang OB = 7 cm maka luas bidang $OABC$ adalah ....
   a. $4\sqrt{5}$ cm^2
   c. $6\sqrt{5}$ cm^2
   b. $5\sqrt{5}$ cm^2
   d. $7\sqrt{5}$ cm^2

5. Perhatikan gambar berikut ini.

   Dua lingkaran bersinggungan seperti tampak pada gambar. Panjang AP = 15 cm, panjang BR = 10 cm, dan MN = 30 cm. Perbandingan PN dan RN adalah ....
   a. $3\sqrt{15} : \sqrt{2}$
   b. $\sqrt{15} : 3\sqrt{2}$
   c. $\sqrt{2} : 3\sqrt{15}$
   d. $3\sqrt{2} : \sqrt{15}$

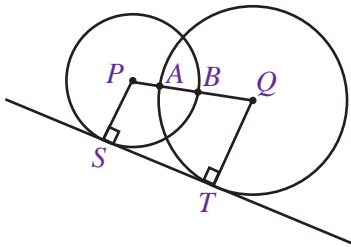
6. Perhatikan gambar berikut

   Kedua lingkaran pada gambar di atas memiliki ...
   a. satu garis singgung persekutuan luar dan satu garis singgung persekutuan dalam
   b. satu garis singgung persekutuan luar dan dua garis singgung persekutuan dalam
   c. dua garis singgung persekutuan luar dan satu garis singgung persekutuan dalam
   d. dua garis singgung persekutuan luar dan dua garis singgung persekutuan dalam

7.

Pada gambar tersebut, panjang jari-jari AD = 8 cm, panjang jari-jari BC = 3 cm, dan jarak AB = 13 cm. Luas trapesium $ABCD$ adalah ....

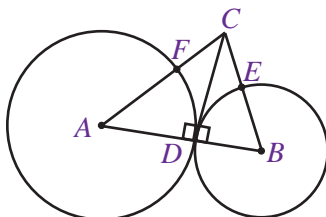
a. 46 cm²
b. 56 cm²
c. 66 cm²
d. 76 cm²

8. Panjang jari-jari dua lingkaran masing-masing adalah 2 cm dan 10 cm. Panjang garis singgung persekutuan luarnya adalah 15 cm. Jarak kedua titik pusat lingkaran adalah ....

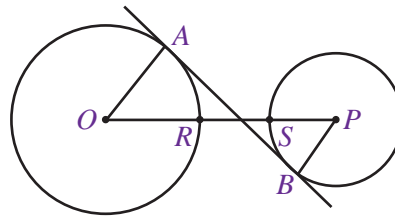
a. 13 cm
b. 17 cm
c. 23 cm
d. 17 cm

9. Perhatikan gambar berikut ini.

Dua lingkaran berpotongan di A dan B. Masing-masing lingkaran berjari-jari 6 cm dan 8 cm. Jika panjang AB = 4 cm maka panjang garis singgung ST adalah ....

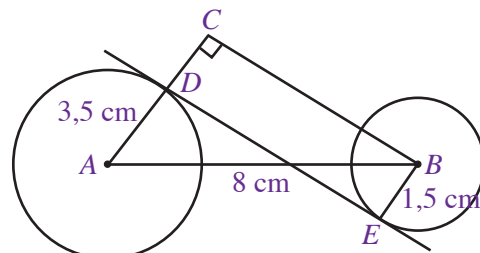
a. $3\sqrt{5}$
b. $4\sqrt{5}$
c. $3\sqrt{6}$
d. $4\sqrt{6}$

10.

Pada gambar di atas, D merupakan titik singgung. Panjang A = 10 cm, BE = 6 cm, dan BC = 10 cm. Panjang CD dan AC masing-masing adalah ....

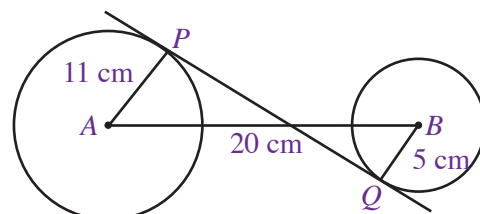
a. 6 cm dan $\sqrt{41}$ cm
b. 8 cm dan $2\sqrt{41}$ cm
c. 10 cm dan $3\sqrt{41}$ cm
d. 12 cm dan $4\sqrt{41}$ cm

11. Perhatikan gambar berikut ini.

Panjang OA = 4 cm, panjang BP = panjang RS = 2 cm. Panjang garis singgung persekutuan dalam AB adalah ....

a. $2\sqrt{7}$
b. $3\sqrt{7}$
c. $4\sqrt{7}$
d. $5\sqrt{7}$

12. Perhatikan gambar di bawah ini.

Panjang AD = 3,5 cm, panjang BE = 1,5 cm, dan jarak AB = 8 cm. Luas ΔABC adalah ....

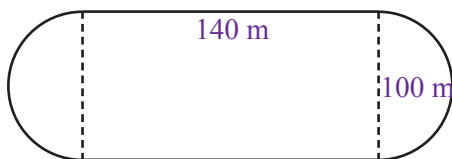
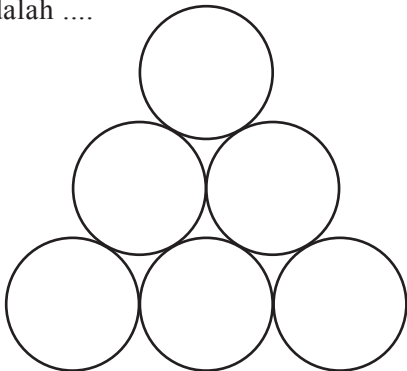
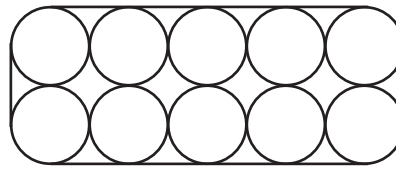
a. $5\sqrt{39}$
b. $\frac{1}{2}\sqrt{39}$
c. $\frac{5}{2}\sqrt{39}$
d. $\frac{3}{2}\sqrt{39}$

13. Perhatikan gambar berikut.

Panjang garis singgung persekutuan dalam adalah ....

a. 12 cm
b. 14 cm
c. 16 cm
d. 18 cm

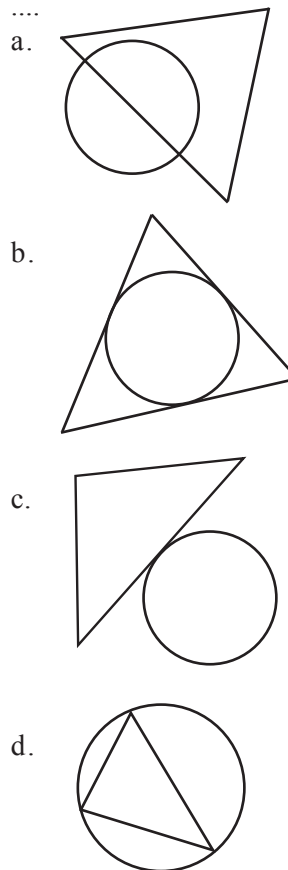
14. Dua lingkaran berjari-jari 15 cm dan 9 cm. Jarak terdekat kedua sisi lingkaran tersebut adalah 16 cm. Panjang garis singgung persekutuan dalam kedua lingkaran tersebut adalah ....

a. 32 cm
b. 34 cm
c. 36 cm
d. 38 cm

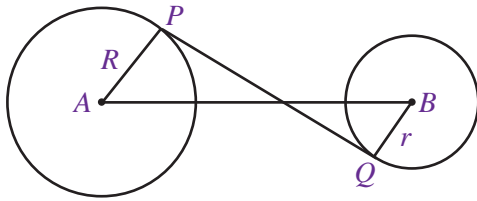
15. Perbandingan jari-jari dua lingkaran adalah 1 : 2. Panjang garis singgung persekutuan dalam kedua lingkaran tersebut adalah 12 cm dan jarak antara kedua pusatnya 15 cm. Panjang jari-jari masing-masing lingkaran adalah ....
    a. 2 cm dan 4 cm
    b. 3 cm dan 6 cm
    c. 4 cm dan 8 cm
    d. 5 cm dan 10 cm
16. Diketahui dua lingkaran yang masing-masing berjari-jari r dan $r + 1$. Panjang garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran tersebut adalah $3r$. Jika jarak kedua titik pusat lingkaran adalah 15 cm maka panjang r adalah ....
    a. 3 cm
    b. 4 cm
    c. 5 cm
    d. 6 cm
17. Gambar berikut merupakan penampang lintasan lari di sebuah gelanggang olahraga. Pihak pengelola berencana untuk memasang pagar di sekeliling lintasan. Jika ongkos untuk memasang pagar adalah Rp140.000,00 per meter maka jumlah uang minimal yang harus disediakan adalah ....

    a. Rp81.200.000,00
    b. Rp82.200.000,00
    c. Rp83.200.000,00
    d. Rp84.200.000,00
18. Gambar berikut ini adalah penampang 6 buah kaleng cat yang berbentuk tabung dan berjari-jari 14 cm. Panjang tali terpendek yang dibutuhkan untuk mengikat keenam kaleng cat tersebut adalah ....

    a. 256 cm
    b. 258 cm
    c. 260 cm
    d. 262 cm
19. Gambar di bawah ini adalah penampang 10 buah gelas berbentuk tabung dengan jari-jari 10 cm. Panjang tali minimal yang diperlukan untuk mengikat gelas-gelas tersebut dengan susunan seperti dalam gambar adalah ....

    a. 261,8 cm
    b. 262,8 cm
    c. 261,6 cm
    d. 262,6 cm
20. Lingkaran luar segitiga diperlihatkan oleh gambar ....
    a.

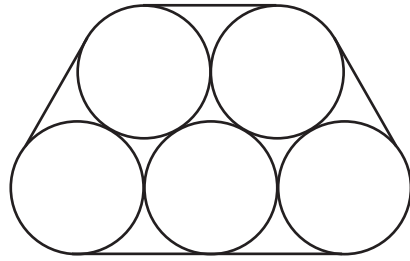
    b.

    c.

    d.

B. Kerjakanlah soal-soal berikut

1. Panjang jari-jari dua lingkaran adalah 20 cm dan 10 cm. Jarak antara kedua pusat lingkaran itu 50 cm. Hitunglah panjang garis singgung persekutuan luar dan garis singgung persekutuan dalamnya.
2. Dua lingkaran yang berpusat di P dan Q terpisah sejauh 25 cm. Panjang garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran tersebut 34 cm. Jika diketahui jari-jari lingkaran dengan pusat P adalah 4 cm, hitunglah jari-jari lingkaran dengan pusat Q.

3. Perhatikan gambar berikut.

Panjang PQ = 24 cm, AB = 30 cm dan AP = 10 cm. Hitunglah perbandingan luas lingkaran yang berpusat di A dengan luas lingkaran yang berpusat di B.

4. Lima buah pipa disusun seperti gambar berikut. Jika diameter pipa itu 20 cm, berapakah panjang tali minimal untuk mengikat lima pipa itu.

5. Lukislah lingkaran dalam dan lingkaran luar dari sebuah segitiga sama sisi dengan panjang sisi 5 cm.

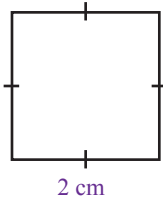
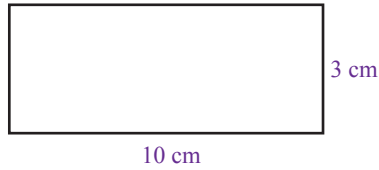
Sumber: *www.jackspets.com*, 1997

Bab

8

Bangun Ruang Sisi Datar

A. Kubus
B. Balok
C. Prisma
D. Limas

Di Sekolah Dasar, kamu telah mengenal bangun-bangun ruang seperti kubus, balok, dan prisma. Sekarang, materi tersebut akan kamu pelajari kembali, ditambah satu bangun ruang lagi, yaitu **limas**.

Dalam kehidupan sehari-hari, mungkin kamu sering melihat benda-benda yang berbentuk kubus, balok, prisma, dan limas. Misalnya, sebuah akuarium berbentuk balok memiliki ukuran panjang, lebar, dan tingginya berturut-turut adalah 60 cm, 30 cm, dan 25 cm. Jika akuarium tersebut akan diisi air sebanyak $\frac{7}{8}$ bagian, berapa liter air yang diperlukan? Untuk menjawabnya, pelajari bab ini dengan baik.

Uji Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari materi pada bab ini, kerjakan soal-soal berikut.

1. Hitunglah:
   a. $5,9 \times 3,8 \times 7,1$
   b. $2 (5 \times 4) + 2 (5 \times 3) + 2 (4 \times 3)$
   c. $\sqrt{6^2 + 8^2}$
2. Diketahui sebuah segitiga memiliki panjang alas 18 cm dan tinggi 12 cm. Tentukan luas segitiga tersebut.
3. Hitunglah luas kedua bangun berikut.

a.

b.

Sumber: *Dokumentasi Penulis*
Gambar 8.1 : Dadu

A. Kubus

Pernahkah kamu melihat dadu? Dadu merupakan salah satu alat permainan yang berbentuk kubus. Apa yang dimaksud dengan kubus? Coba kamu pelajari uraian berikut ini.

1. Pengertian Kubus

Perhatikan Gambar 8.2 secara saksama. Gambar tersebut menunjukkan sebuah bangun ruang yang semua sisinya berbentuk persegi dan semua rusuknya sama panjang. Bangun ruang seperti itu dinamakan kubus. Gambar 8.2 menunjukkan sebuah kubus *ABCD.EFGH* yang memiliki unsur-unsur sebagai berikut.

Gambar 8.2 : Kubus *ABCD.EFGH*

a. Sisi/Bidang

Sisi kubus adalah bidang yang membatasi kubus. Dari Gambar 8.2 terlihat bahwa kubus memiliki 6 buah sisi yang semuanya berbentuk persegi, yaitu *ABCD* (sisi bawah), *EFGH* (sisi atas), *ABFE* (sisi depan), *CDHG* (sisi belakang), *BCGF* (sisi samping kiri), dan *ADHE* (sisi samping kanan).

b. Rusuk

Rusuk kubus adalah garis potong antara dua sisi bidang kubus dan terlihat seperti kerangka yang menyusun kubus. Coba perhatikan kembali Gambar 8.2. Kubus *ABCD.EFGH* memiliki 12 buah rusuk, yaitu *AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, AE, BF, CG*, dan *DH*.

c. Titik Sudut

Titik sudut kubus adalah titik potong antara dua rusuk. Dari Gambar 8.2 , terlihat kubus *ABCD. EFGH* memiliki 8 buah titik sudut, yaitu titik *A, B, C, D, E, F, G*, dan *H*.

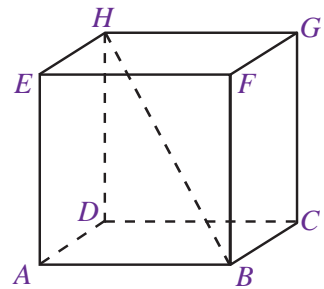
Selain ketiga unsur di atas, kubus juga memiliki diagonal. Diagonal pada kubus ada tiga, yaitu diagonal bidang, diagonal ruang, dan bidang diagonal.

Gambar 8.3 : diagonal bidang kubus *ABCD.EFGH*

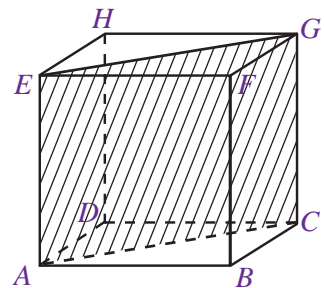
d. Diagonal Bidang

Coba kamu perhatikan kubus *ABCD.EFGH* pada Gambar 8.3 . Pada kubus tersebut terdapat garis *AF* yang menghubungkan dua titik sudut yang saling berhadapan dalam satu sisi/bidang. Ruas garis tersebut dinamakan sebagai diagonal bidang. Coba kamu sebutkan diagonal bidang yang lain dari kubus pada Gambar 8.3 .

e. Diagonal Ruang

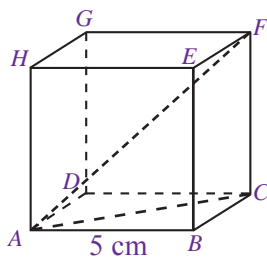
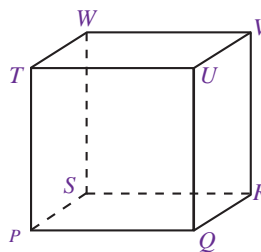
Sekarang perhatikan kubus *ABCD.EFGH* pada Gambar 8.4 . Pada kubus tersebut, terdapat ruas garis *HB* yang menghubungkan dua titik sudut yang saling berhadapan dalam satu ruang. Ruas garis tersebut disebut diagonal ruang. Coba kamu sebutkan diagonal ruang yang lain dari kubus pada Gambar 8.4 .

Gambar 8.4 : *HB* merupakan diagonal ruang kubus *ABCD.EFGH*

f. Bidang Diagonal

Perhatikan kubus *ABCD.EFGH* pada Gambar 8.5 secara saksama. Pada gambar tersebut, terlihat dua buah diagonal bidang pada kubus *ABCD. EFGH* yaitu *AC* dan *EG*. Ternyata, diagonal bidang *AC* dan *EG* beserta dua rusuk kubus yang sejajar, yaitu *AE* dan *CG* membentuk suatu bidang di dalam ruang kubus bidang *ACGE* pada kubus *ABCD*. Bidang *ACGE* disebut sebagai bidang diagonal. Coba kamu sebutkan bidang diagonal lain dari kubus *ABCD.EFGH*.

Gambar 8.5 : *ACGE* merupakan bidang diagonal kubus *ABCD.EFGH*

1. Perhatikan gambar kubus di samping. Tentukan mana yang dimaksud dengan:
   a. sisi,
   b. rusuk,
   c. titik sudut,
   d. diagonal bidang,
   e. diagonal ruang,
   f. bidang diagonal.

2. Dari gambar kubus di samping, tentukan:
   a. panjang rusuk *BC*,
   b. panjang diagonal bidang *AC*,
   c. panjang diagonal ruang *AF*.

Jawab:

1. Dari kubus *PQRS.TUVW*, diperoleh
   a. sisi : *PQRS, TUVW, PQUT, QRVU, SRVW*, dan *PSWT*.
   b. rusuk : *PQ, QR, RS, SP, TU, UV, VW, WT, PT, QU, RV, SW*.
   c. titik sudut : *P, Q, R, S, T, U, V*, dan *W*.
   d. diagonal bidang : *PU, QT, QV, RV, RU, RW, SV, ST, PW, PR, QS, TV*, dan *UW*.
   e. diagonal ruang : *PV, QW, RT*, dan *SU*.
   f. bidang diagonal : *PRVT, QSWU, PSVU, QRWT, SRTU*, dan *RSTU*.
2. a. Oleh karena kubus memiliki panjang rusuk yang sama maka panjang rusuk *BC* = panjang rusuk *AB* = 5 cm.
   b. Diketahui: *AB* = 5 cm
      BC = 5 cm
      Untuk mencari panjang diagonal bidang *AC*, digunakan Teorema Pythagoras.
      $AC^2 = AB^2 + BC^2$
      $= 5^2 + 5^2$
      $= 25 + 25 = 50$
      $AC = \sqrt{50}$ cm $= 5\sqrt{2}$ cm
      Jadi, panjang diagonal bidang *AC* adalah $5\sqrt{2}$ cm.

Tugas 8.1

Bersama teman sebangkumu, hitunglah panjang setiap diagonal bidang pada Contoh Soal 8.1 nomor 2. Laporkan hasilnya di depan kelasmu.

c. Diketahui $AC = 5\sqrt{2}$ cm

$CF = AB = 5$ cm

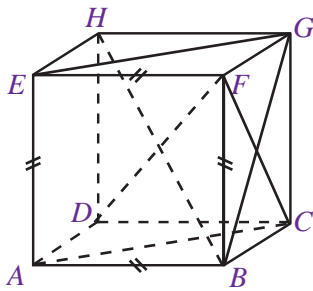
Untuk mencari panjang diagonal ruang *CD* digunakan Teorema Pythagoras.

$AF^2 = AC^2 + CF^2$

$= \left(5\sqrt{2}\right)^2 + 5^2$

$= 50 + 25$

$AF = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

Jadi, panjang diagonal ruang *AF* adalah $5\sqrt{3}$ cm

2. Sifat-Sifat Kubus

Gambar 8.6 : Kubus

Untuk memahami sifat-sifat kubus, coba kamu perhatikan Gambar 8.6 . Gambar tersebut menunjukkan kubus *ABCD.EFGH* yang memiliki sifat-sifat sebagai berikut.

a. Semua sisi kubus berbentuk persegi.
   Jika diperhatikan, sisi *ABCD, EFGH, ABFE* dan seterusnya memiliki bentuk persegi dan memiliki luas yang sama.

b. Semua rusuk kubus berukuran sama panjang.
   Rusuk-rusuk kubus *AB, BC, CD,* dan seterusnya memiliki ukuran yang sama panjang.

c. Setiap diagonal bidang pada kubus memiliki ukuran yang sama panjang.
   Perhatikan ruas garis *BG* dan *CF* pada Gambar 8.6 . Kedua garis tersebut merupakan diagonal bidang kubus *ABCD.EFGH* yang memiliki ukuran sama panjang.

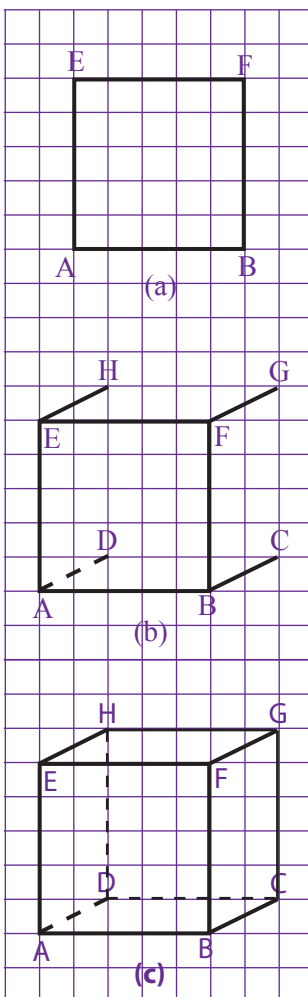
d. Setiap diagonal ruang pada kubus memiliki ukuran sama panjang.
   Dari kubus *ABCD.EFGH* pada Gambar 8.6 , terdapat dua diagonal ruang, yaitu *HB* dan *DF* yang keduanya berukuran sama panjang.

e. Setiap bidang diagonal pada kubus memiliki bentuk persegipanjang.
   Perhatikan bidang diagonal *ACGE* pada Gambar 8.6 . Terlihat dengan jelas bahwa bidang diagonal tersebut memiliki bentuk persegipanjang.

3. Menggambar Kubus

Kamu telah memahami pengertian, unsur, dan sifat-sifat kubus. Sekarang, bagaimana cara menggambarnya? Menggambar bangun ruang khususnya kubus, lebih mudah dilakukan pada kertas berpetak. Adapun langkah-langkah yang harus dilakukan adalah sebagai berikut.

- Gambarlah sebuah persegi, misalkan persegi *ABFE* yang berperan sebagai sisi depan. Bidang *ABFE* ini disebut sebagai bidang frontal, artinya bidang yang dibuat sesuai dengan bentuk sebenarnya. Coba perhatikan Gambar 8.7 (a) .
- Langkah selanjutnya, buatlah ruas garis yang sejajar dan sama panjang dari setiap sudut persegi yang telah dibuat sebelumnya. Panjang ruas-ruas garis tersebut kurang lebih setengah dari panjang sisi persegi dengan kemiringan kurang lebih 45°.

  Perhatikan Gambar 8.7 (b) . Garis *AD* digambar putus-putus, ini menunjukkan bahwa ruas garis tersebut terletak di belakang persegi *ABFE*.

Gambar 8.7 : Menggambar Kubus

- Kemudian, buatlah persegi dengan cara menghubungkan ujung-ujung ruas garis yang telah dibuat sebelumnya. Beri nama persegi *CDHG*. Persegi tersebut berperan sebagai sisi belakang dari kubus yang akan dibuat. Coba perhatikan Gambar 8.7 (c) . Pada gambar tersebut, terlihat bahwa sisi atas, sisi bawah, dan sisi samping digambarkan berbentuk jajargenjang. Bidang seperti ini disebut bidang ortogonal, artinya bidang yang digambar tidak sesuai dengan keadaan sebenarnya.

Dari gambar kubus di samping, tentukan:

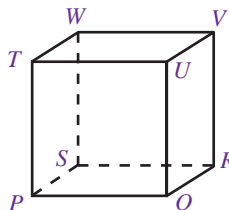
a. bidang frontal,

b. bidang ortogonal.

Jawab:

Dari kubus *PQRS. TUVW*, diperoleh

a. bidang frontal = bidang yang digambar sesuai dengan keadaan sebenarnya
= *PQUT* dan *SRVW*

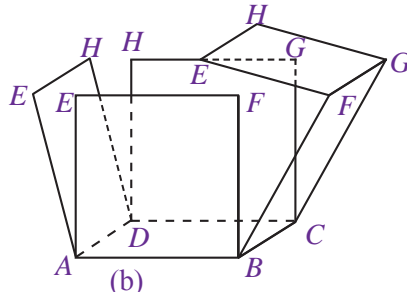
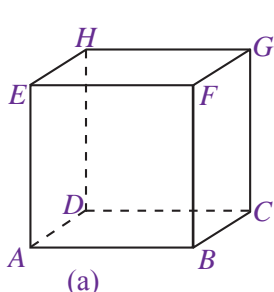
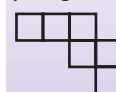
b. bidang ortogonal = bidang yang digambar tidak sesuai dengan keadaan sebenarnya
= *PQRS, TUVW, QRVU*, dan *PSWT*

4. Jaring-Jaring Kubus

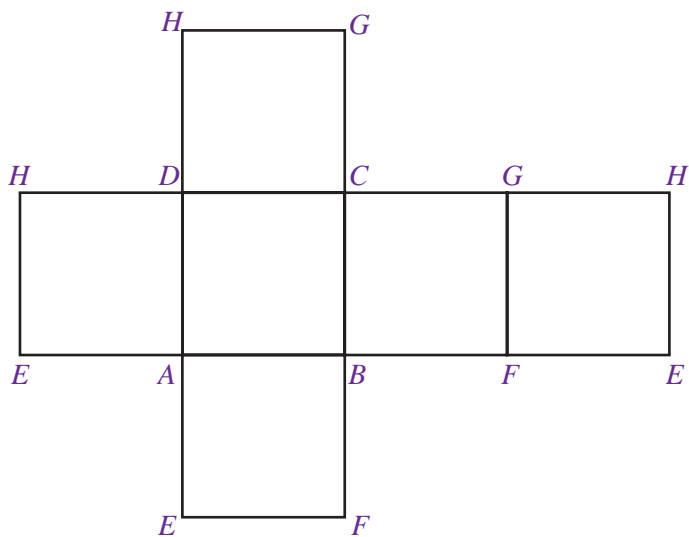
Untuk mengetahui jaring-jaring kubus, lakukan kegiatan berikut dengan kelompok belajarmu.

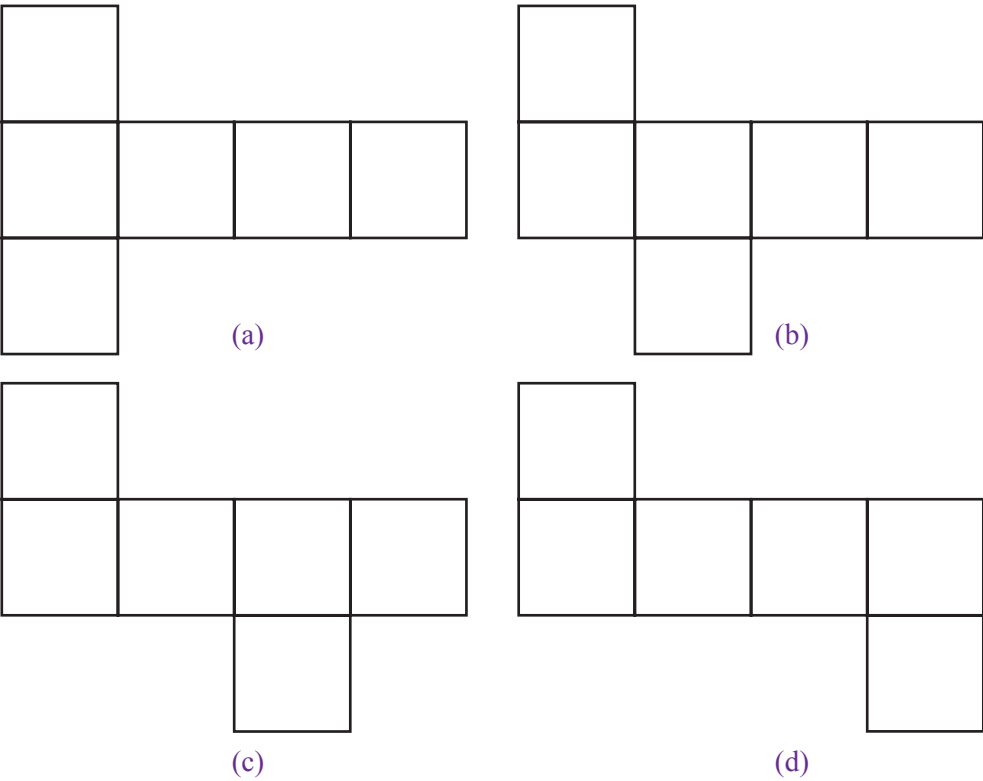
Kegiatan 8.1

1. Siapkan tiga buah dus yang berbentuk kubus, gunting, dan spidol
2. Ambil salah satu dus. Beri nama setiap sudutnya, misalnya *ABCD.EFGH*. Kemudian, irislah beberapa rusuknya mengikuti alur berikut.

(a)

(b)

3. Rebahkan dus yang telah diiris tadi. Bagaimanakah bentuknya?
4. Lakukan hal yang sama pada dua dus yang tersisa. Kali ini, buatlah alur yang berbeda, kemudian rebahkan. Bagaimana bentuknya?

Jika kamu melakukan Kegiatan 8.1 dengan benar, pada dus pertama akan diperoleh bentuk berikut.

Gambar 8.8 : Jaring-jaring kubus yang diperoleh dari Kegiatan 8.1

Hasil rebahan dus makanan pada Gambar 8.8 disebut jaring-jaring kubus,. Jaring-jaring kubus adalah rangkaian sisi-sisi suatu kubus yang jika dipadukan akan membentuk suatu kubus. Terdapat berbagai macam bentuk jaring-jaring kubus. Di antaranya sebagai berikut.

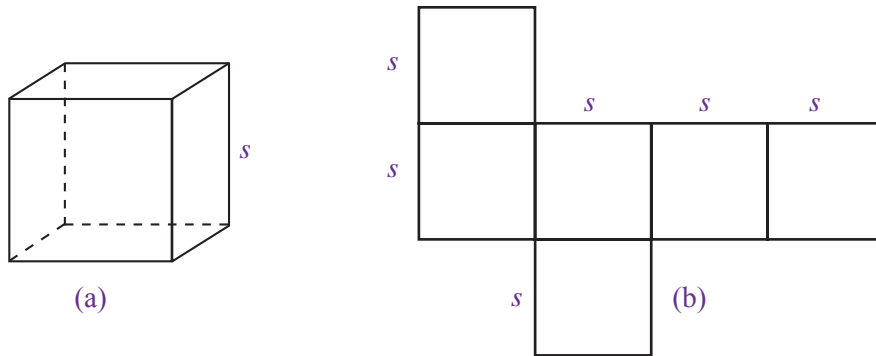
Gambar 8.9 : Beberapa contoh jaring-jaring kubus.

Tugas 8.2

Buatlah jaring-jaring kubus selain contoh yang sudah ada. Kemudian, bandingkan hasilnya dengan teman sebangkumu.

Sekarang, coba kamu periksa hasil irisan dua dus yang tersisa pada Kegiatan 8.1. Apakah hasilnya sama dengan jaring-jaring kubus pada Gambar 8.1 ? Apa yang dapat kamu simpulkan dari kegiatan tersebut?

5. Luas Permukaan Kubus

Misalkan, kamu ingin membuat kotak makanan berbentuk kubus dari sehelai karton. Jika kotak makanan yang diinginkan memiliki panjang rusuk 8 cm, berapa luas karton yang dibutuhkan untuk membuat kotak makanan tersebut? Masalah ini dapat diselesaikan dengan cara menghitung luas permukaan suatu kubus.

Coba kamu perhatikan Gambar 8.10 berikut ini.

Gambar 8.10 : Kubus dan Jaring

Dari Gambar 8.10 terlihat suatu kubus beserta jaring-jaringnya. Untuk mencari luas permukaan kubus, berarti sama saja dengan menghitung luas jaring-jaring kubus tersebut. Oleh karena jaring-jaring kubus merupakan 6 buah persegi yang sama dan kongruen maka

luas permukaan kubus = luas jaring-jaring kubus

$= 6 \times (s \times s)$

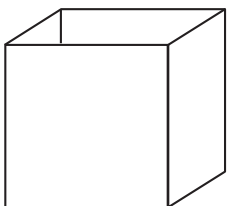
$= 6 \times s^2$

$= L = 6\ s^2$

Jadi, luas permukaan kubus dapat dinyatakan dengan rumus sebagai berikut.

Luas permukaan kubus = $6s^2$

Contoh Soal 8.3

1. Sani ingin membuat kotak pernak-pernik berbentuk kubus dari kertas karton. Jika kotak pernak-pernik tersebut memiliki panjang rusuk 12 cm, tentukan luas karton yang dibutuhkan Sani.
2. Sebuah jaring-jaring kubus memiliki luas 54cm². Jika jaring-jaring tersebut dibuat sebuah kubus, tentukan panjang rusuk kubus tersebut.
3. Gambar di samping adalah sebuah kubus tanpa tutup dengan panjang rusuk 5 cm. Tentukan luas permukaannya.

Jawab:

1. Luas permukaan kubus $= 6 \cdot s^2$

   $= 6 \cdot 12^2$

   $= 72$

   Jadi, luas karton yang dibutuhkan Sani adalah 72 cm².

2. Luas permukaan kubus = $6s^2$ maka $54 = 6 \cdot s^2$

$$s^2 = \frac{54}{6}$$
$$s^2 = 9$$
$$s = 3$$

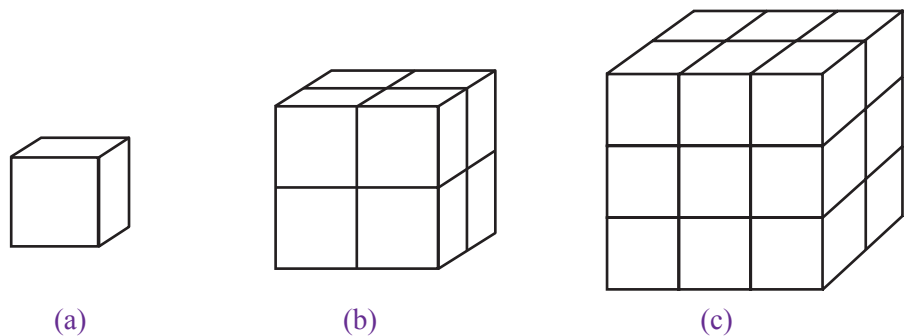
Jadi, panjang rusuk kubus tersebut adalah 3 cm.

3. Kubus tanpa tutup memiliki 5 buah persegi sehingga

luas permukaan kubus tanpa tutup $= 5 \cdot s^2$
$= 5 \cdot 5^2$
$= 5 \cdot 25$
$= 125$

Jadi, luas permukaannya adalah 125 cm²

6. Volume Kubus

Misalkan, sebuah bak mandi yang berbentuk kubus memiliki panjang rusuk 1,2 m. Jika bak tersebut diisi penuh dengan air, berapakah volume air yang dapat ditampung? Untuk mencari solusi permasalahan ini, kamu hanya perlu menghitung volume bak mandi tersebut. Bagaimana mencari volume kubus? Untuk menjawabnya, coba kamu perhatikan Gambar 8.11

Gambar 8.11 : Kubus Satuan

Gambar 8.11 menunjukkan bentuk-bentuk kubus dengan ukuran berbeda. Kubus pada Gambar 8.11 (a) merupakan **kubus satuan**. Untuk membuat kubus satuan pada Gambar 8.11 (b) , diperlukan $2 \times 2 \times 2 = 8$ kubus satuan, sedangkan untuk membuat kubus pada Gambar 8.11 (c) , diperlukan $3 \times 3 \times 3 = 27$ kubus satuan. Dengan demikian, volume atau isi suatu kubus dapat ditentukan dengan cara mengalikan panjang rusuk kubus tersebut sebanyak tiga kali. sehingga

volume kubus = panjang rusuk × panjang rusuk × panjang rusuk
$= s \times s \times s$
$= s^3$

Jadi, volume kubus dapat dinyatakan sebagai berikut.

Volume kubus = s^3

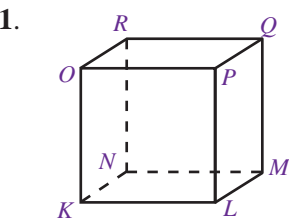
dengan s merupakan panjang rusuk kubus.

Problematika

Hasan mempunyai sebuah kotak kayu berbentuk kubus, panjang sisi kubus 20 cm. Jika Hasan memotong-motong kubus tersebut menjadi beberapa kotak kecil berbentuk kubus dengan panjang sisi 4 cm, tentukan jumlah kotak kecil yang diperoleh Hasan.

Uji Kompetensi 8.1

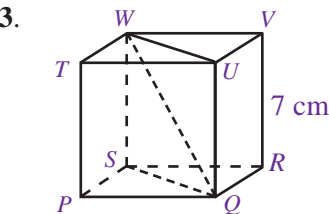
Kerjakanlah soal-soal berikut.

1.

Dari kubus *KLMN.OPQR* di atas, tentukan mana yang dimaksud:

a. sisi,
b. rusuk,
c. titik sudut,
d. diagonal bidang,
e. diagonal ruang,
f. bidang diagonal.

2. Dari kubus *KLMN.OPQR* pada soal nomor 1, tentukan pula:

a. sisi-sisi yang saling berhadapan,
b. rusuk-rusuk yang sejajar.

3.

Sebuah kubus *PQRS.TUVW* memiliki panjang rusuk 7 cm. Tentukan:

a. luas bidang *PQRS*,
b. panjang diagonal bidang *SQ*,
c. panjang diagonal ruang *WQ*,
d. luas bidang diagonal *SQUW*.

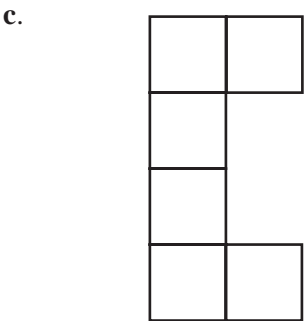
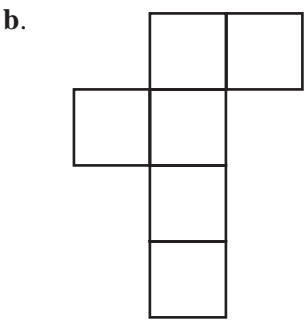
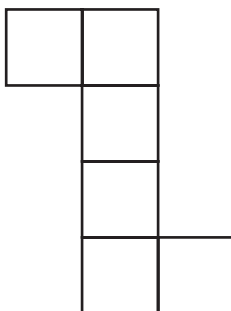
4. Buatlah kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk 3 cm. Dari gambar yang telah dibuat, tentukan:

a. bidang frontal,
b. bidang ortogonal.

5. Tentukanlah apakah rangkaian persegi berikut merupakan jaring-jaring kubus atau bukan.

a.

b.

c.

6. Diketahui sebuah kubus dari bahan triplek memiliki panjang rusuk 30 cm. Berapakah luas triplek yang dibutuhkan untuk membuat kubus tersebut?

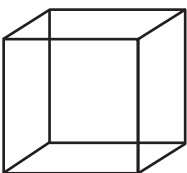
7. Sebuah ruangan berbentuk kubus memiliki tinggi 2,8 m. Jika tembok di ruangan tersebut akan dicat, tentukan luas bagian yang akan dicat.

8. Sebuah bak mandi berbentuk kubus memiliki panjang rusuk 1,4 m. Tentukan banyak air yang dibutuhkan untuk mengisi bak mandi tersebut hingga penuh.

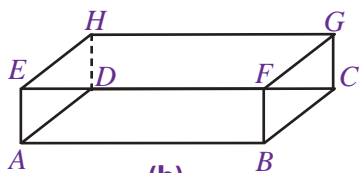
9. Dua buah kardus berbentuk kubus memiliki ukuran yang berbeda. Kardus yang besar memiliki volume 64 cm^3. Jika kardus yang besar dapat diisi penuh oleh 8 kardus kecil, tentukan:

a. volume kardus kecil,
b. panjang rusuk kardus kecil,

10. Gambar di samping adalah kerangka kubus yang terbuat dari kawat. Jika kawat yang dibutuhkan sepanjang 48 cm, tentukan:

a. panjang rusuk kubus tersebut,
b. luas permukaan kubus tersebut,
c. volume kubus tersebut.

B. Balok

Sumber: *Dokumentasi Penulis*

(a)

(b)

Gambar 8.12 : Balok

Banyak sekali benda-benda di sekitarmu yang memiliki bentuk seperti balok. Misalnya, kotak korek api, dus air mineral, dus mie instan, batu bata, dan lain-lain. Mengapa benda-benda tersebut dikatakan berbentuk balok? Untuk menjawabnya, cobalah perhatikan dan pelajari uraian berikut.

1. Pengertian Balok

Perhatikan gambar kotak korek api pada Gambar 8.12 (a). Jika kotak korek api tersebut digambarkan secara geometris, hasilnya akan tampak seperti pada Gambar 8.12 (b) . Bangun ruang *ABCD.EFGH* pada gambar tersebut memiliki tiga pasang sisi berhadapan yang sama bentuk dan ukurannya, di mana setiap sisinya berbentuk persegipanjang. Bangun ruang seperti ini disebut balok. Berikut ini adalah unsur-unsur yang dimiliki oleh balok *ABCD.EFGH* pada Gambar 8.12 (b) .

a. Sisi/Bidang

Sisi balok adalah bidang yang membatasi suatu balok. Dari Gambar 8.12 (b), terlihat bahwa balok *ABCD.EFGH* memiliki 6 buah sisi berbentuk persegipanjang. Keenam sisi tersebut adalah *ABCD* (sisi bawah), *EFGH* (sisi atas), *ABFE* (sisi depan), *DCGH* (sisi belakang), *BCGF* (sisi samping kiri), dan *ADHE* (sisi samping kanan). Sebuah balok memiliki tiga pasang sisi yang berhadapan yang sama bentuk dan ukurannya. Ketiga pasang sisi tersebut adalah *ABFE* dengan *DCGH*, *ABCD* dengan *EFGH*, dan *BCGF* dengan *ADHE*.

b. Rusuk

Sama seperti dengan kubus, balok *ABCD.EFGH* memiliki 12 rusuk. Coba perhatikan kembali Gambar 8.12 (b) secara seksama. Rusuk-rusuk balok *ABCD. EFGH* adalah *AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, AE, BF, CG*, dan *HD*.

Gambar 8.13 : Diagonal Bidang

c. Titik Sudut

Dari Gambar 8.12 , terlihat bahwa balok *ABCD.EFGH* memiliki 8 titik sudut, yaitu *A, B, C, D, E, F, G*, dan *H*.

Sama halnya dengan kubus, balok pun memiliki istilah diagonal bidang, diagonal ruang, dan bidang diagonal. Berikut ini adalah uraian mengenai istilah-istilah berikut.

d. Diagonal Bidang

Coba kamu perhatikan Gambar 8.13 . Ruas garis *AC* yang melintang antara dua titik sudut yang saling berhadapan pada satu bidang, yaitu titik sudut *A* dan titik sudut *C*, dinamakan **diagonal bidang** balok *ABCD.EFGH.* Coba kamu sebutkan diagonal bidang yang lain dari balok pada Gambar 8.13 .

Gambar 8.14 : Diagonal Ruang

e. Diagonal Ruang

Ruas garis *CE* yang menghubungkan dua titik sudut *C* dan *E* pada balok *ABCD.EFGH* seperti pada Gambar 8.14 disebut **diagonal ruang** balok tersebut. Jadi, diagonal ruang terbentuk dari ruas garis yang menghubungkan dua titik sudut yang saling berhadapan di dalam suatu bangun ruang. Coba kamu sebutkan diagonal ruang yang lain pada Gambar 8.14 .

e. Bidang Diagonal

Gambar 8.15 : Bidang Diagonal

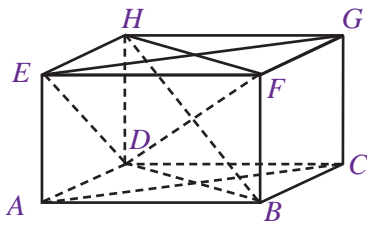
Sekarang, perhatikan balok *ABCD.EFGH* pada Gambar 8.15. Dari gambar tersebut terlihat dua buah diagonal bidang yang sejajar, yaitu diagonal bidang *HF* dan *DB*. Kedua diagonal bidang tersebut beserta dua rusuk balok yang sejajar, yaitu *DH* dan *BF* membentuk sebuah bidang diagonal. Bidang *BDHF* adalah bidang diagonal balok *ABCD.EFGH*. Coba kamu sebutkan bidang diagonal yang lain dari balok tersebut.

Untuk lebih jelasnya, coba kamu perhatikan dan pelajari Contoh Soal 8.4

Contoh Soal 8.4

1. Perhatikan gambar balok di samping. Tentukan mana yang dimaksud dengan:
   a. sisi, d. diagonal bidang,
   b. rusuk, e. diagonal ruang,
   c. titik sudut, f. bidang diagonal.
2. Dari gambar balok di samping, tentukan:
   a. panjang rusuk *TP*,
   b. panjang diagonal bidang *PR*,
   c. panjang diagonal ruang *TR*.

Jawab:

1. Dari balok *KLMN.OPQR*, diperoleh.
   a. sisi/bidang: *KLMN*, *OPQR*, *KLPO*, *NMQR*, *LMQP* dan *KNRO*.
   b. rusuk: *KL*, *LM*, *MN*, *NK*, *OP*, *PQ*, *QR*, *RO*, *KO*, *LP*, *MQ*, dan *RN*.
   c. titik sudut: *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P*, *Q* dan *R*.
   d. diagonal bidang: *KM*, *LN*, *OQ*, *PR*, *MP*, *LQ*, *KR*, *NO*, *KP*, *LO*, *MR*, dan *NQ*.
   e. diagonal ruang: *KQ*, *LR*, *MO*, dan *NP*.
   f. bidang diagonal: *KMQO*, *PLNR*, *PQNK*, *KLQR*, *LMRO*, dan *MNOP*.
2. a. Panjang rusuk *TP* sejajar dan sama dengan panjang rusuk *VR* maka panjang rusuk *TP* = panjang rusuk *VR* = 5 cm.
   Jadi, panjang rusuk *TP* adalah 5 cm.
   b. Panjang diagonal PR dapat dihitung menggunakan Teorema Pythagoras.
   $PR^2 = PQ^2 + QR^2$
   $PR^2 = 8^2 + 6^2$
   $PR^2 = 64 + 36$
   $PR^2 = 100$
   $PR = \sqrt{100}$
   $PR = 10$
   Jadi, panjang diagonal bidang *PR* adalah 10 cm.
   c. Panjang diagonal ruang *TR* dapat dihitung menggunakan Teorema Pythagoras.
   $TR^2 = TP^2 + PR^2$
   $TR^2 = 5^2 + 10^2$
   $TR^2 = 25 + 100$
   $TR^2 = 125$
   $TR = \sqrt{125}$
   $TR = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$
   Jadi, panjang diagonal ruang TR adalah $5\sqrt{5}$ cm

2. Sifat-Sifat Balok

Balok memiliki sifat yang hampir sama dengan kubus. Amatilah balok *ABCD.EFGH* pada gambar di samping. Berikut ini akan diuraikan sifat-sifat balok.

a. Sisi-sisi balok berbentuk persegipanjang.
   Coba kamu perhatikan sisi *ABCD*, *EFGH*, *ABFE*, dan seterusnya. Sisi-sisi tersebut memiliki bentuk persegipanjang. Dalam balok, minimal memiliki dua pasang sisi yang berbentuk persegipanjang.

b. Rusuk-rusuk yang sejajar memiliki ukuran sama panjang.
   Perhatikan rusuk-rusuk balok pada gambar disamping Rusuk-rusuk yang sejajar seperti *AB*, *CD*, *EF*, dan *GH* memiliki ukuran yang sama panjang begitu pula dengan rusuk *AE*, *BF*, *CG*, dan *DH* memiliki ukuran yang sama panjang.

c. Setiap diagonal bidang pada sisi yang berhadapan memiliki ukuran sama panjang.
   Dari gambar terlihat bahwa panjang diagonal bidang pada sisi yang berhadapan, yaitu *ABCD* dengan *EFGH*, *ABFE* dengan *DCGH*, dan *BCFG* dengan *ADHE* memiliki ukuran yang sama panjang.

d. Setiap diagonal ruang pada balok memiliki ukuran sama panjang. Diagonal ruang pada balok *ABCD.EFGH*, yaitu *AG*, *EC*, *DF*, dan *HB* memiliki panjang yang sama.

e. Setiap bidang diagonal pada balok memiliki bentuk persegipanjang. Coba kamu perhatikan balok *ABCD.EFGH* pada gambar. Bidang diagonal balok *EDFC* memiliki bentuk persegipanjang. Begitu pula dengan bidang diagonal lainnya.

Tugas 8.3

Teknik atau cara menggambar balok hampir sama dengan menggambar kubus. Diskusikan dengan teman sebangkumu bagaimana cara menggambar balok. Laporkan hasilnya di depan kelas.

Contoh Soal 8.5

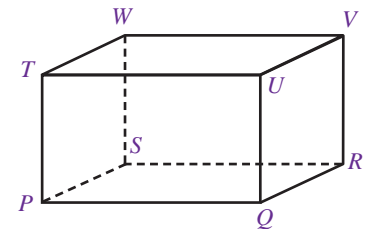
Perhatikan balok *PQRS.TUVW* pada gambar di samping. Tentukan mana yang dimaksud dengan:

a. bidang frontal,

b. bidang ortogonal.

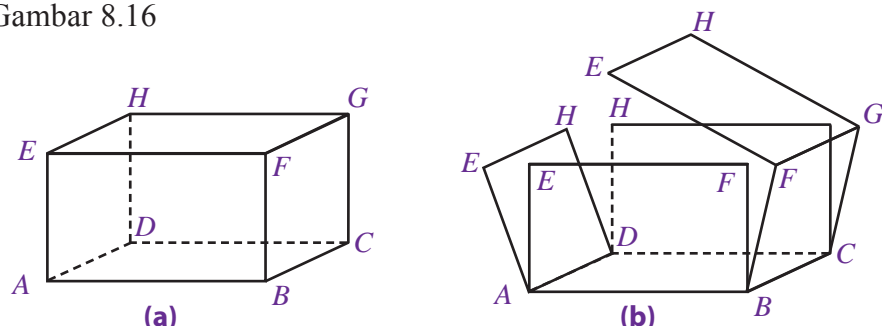
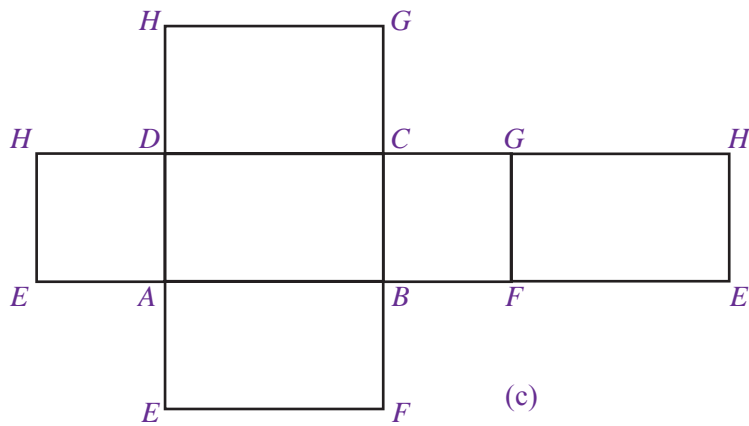
Jawab:

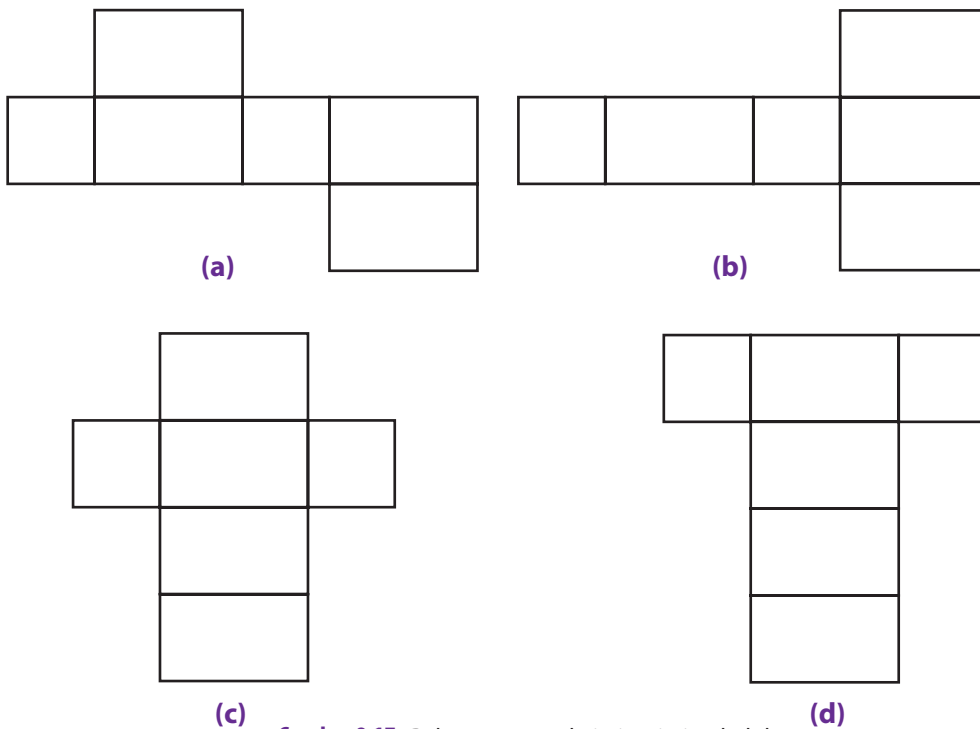
a. Bidang frontal = bidang yang dibuat sesuai dengan keadaan sebenarnya.
   = *PQUT* dan *SRVW*.

b. Bidang ortogonal = bidang yang dibuat tidak sesuai dengan keadaan sebenarnya.
   = *PQRS*, *TUVW*, *QRVU*, dan *PSWT*

4. Jaring-Jaring Balok

Sama halnya dengan kubus, jaring-jaring balok diperoleh dengan cara membuka balok tersebut sehingga terlihat seluruh permukaan balok. Coba kamu perhatikan alur pembuatan jaring-jaring balok yang digambarkan pada Gambar 8.16

(a)

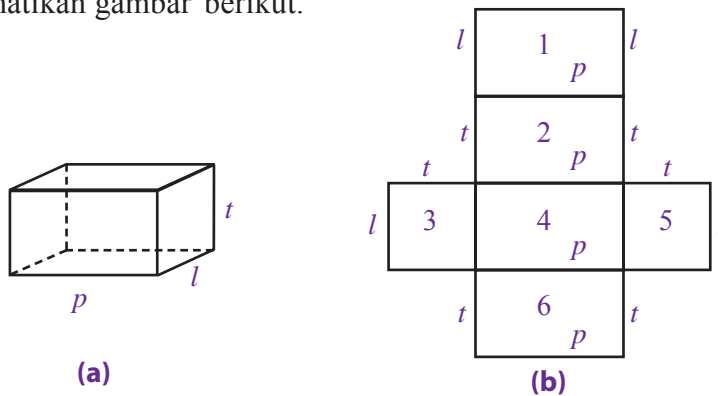
(b)

Gambar 8.16 : Alur pembuatan jaring-jaring balok.

Jaring-jaring balok yang diperoleh pada Gambar 8.16 (c) tersusun atas rangkaian 6 buah persegipanjang. Rangkaian tersebut terdiri atas tiga pasang persegipanjang yang setiap pasangannya memiliki bentuk dan ukuran yang sama. Terdapat berbagai macam bentuk jaring-jaring balok. Di antaranya adalah sebagai berikut.

Gambar 8.17 : Beberapa contoh jaring-jaring balok.

Tugas 8.4

Buatlah jaring-jaring balok selain contoh yang sudah ada. Kemudian, bandingkan hasilnya dengan teman sebangkumu.

5. Luas Permukaan Balok

Cara menghitung luas permukaan balok sama dengan cara menghitung luas permukaan kubus, yaitu dengan menghitung semua luas jaring-jaringnya. Coba kamu perhatikan gambar berikut.

Misalkan, rusuk-rusuk pada balok diberi nama p (panjang), l (lebar), dan t (tinggi) seperti pada gambar .Dengan demikian, luas permukaan balok tersebut adalah

luas permukaan balok = luas persegipanjang 1 + luas persegipanjang 2 + luas persegipanjang 3 + luas persegipanjang 4 + luas persegipanjang 5 + luas persegipanjang 6

$= (p \times l) + (p \times t) + (l \times t) + (p \times l) + (l \times t) + (p \times t)$

$= (p \times l) + (p \times l) + (l \times t) + (l \times t) + (p \times t) + (p \times t)$

$= 2\ (p \times l) + 2(l \times t) + 2(p \times t)$

$= 2\ ((p \times l) + (l \times t) + (p \times t)$

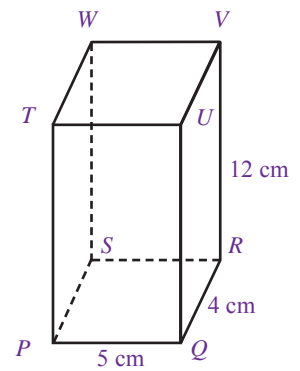
$= 2\ (pl + lt + pt)$

Jadi, luas permukaan balok dapat dinyatakan dengan rumus sebagai berikut.

$$\text{Luas permukaan balok} = 2(pl + lt + pt)$$

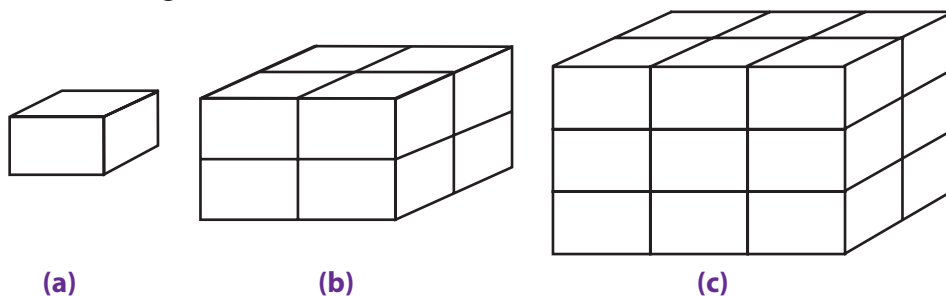
Untuk lebih jelasnya, coba kamu perhatikan dan pelajari Contoh Soal 8.6

Contoh Soal 8.6

1. Perhatikan balok *PQRS.TUVW* pada gambar di samping. Tentukan:
   a. luas permukaan balok,
   b. luas permukaan balok tanpa tutup di bagian atas.
2. Sebuah balok memiliki ukuran panjang 15 cm dan lebar 4 cm. Jika luas permukaan balok tersebut adalah 500 cm^2, berapakah tinggi balok tersebut?

Jawab:

1. a. Luas permukaan balok
   $= 2\ (pl + lt + pt)$
   $= 2\ (5 \cdot 4 + 4 \cdot 12 + 5 \cdot 12)$
   $= 2\ (20 + 48 + 60)$
   $= 2\ (128\ ^2) = 256$
   Jadi, luas permukaan balok tersebut adalah 256 cm^2.
   b. Luas permukaan balok tanpa tutup
   $= pl + 2\ (lt) + 2\ (pt)$
   $= 5 \cdot 4 + 2\ (4 \cdot 12) + 2\ (5 \cdot 12)$
   $= 20 + 2\ (48) + 2\ (60)$
   $= 20 + 96 + 120 = 236$
   Jadi, luas permukaan balok tanpa tutup adalah 236 cm^2.
2. Luas permukaan balok $= 2\ (pl + lt + pt)$
   $500 = 2(15 \cdot 4 + 4 \cdot t + 15 \cdot t)$
   $500 = 2\ (60 + 4 \cdot t + 15 \cdot t)$
   $500 = 2\ (60 + 19 \cdot t)$
   $250 = 60 + 19 \cdot t$
   $250 - 60 = 19 \cdot t$
   $190 = 19 \cdot t$
   $t = \frac{190}{19} \cdot t = 10$
   Jadi, tinggi balok tersebut adalah 10 cm

6. Volume Balok

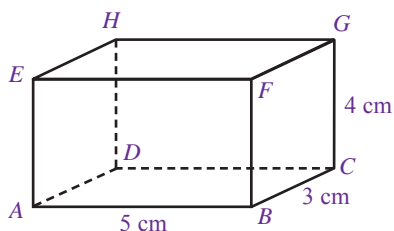
Proses penurunan rumus balok memiliki cara yang sama seperti pada kubus. Caranya adalah dengan menentukan satu balok satuan yang dijadikan acuan untuk balok yang lain. Proses ini digambarkan pada Gambar 8.18 . Coba cermati dengan saksama.

Gambar 8.18 : Balok-balok satuan

Gambar 8.18 menunjukkan pembentukan berbagai balok dari balok satuan. Gambar 8.18 (a) adalah balok satuan. Untuk membuat balok seperti pada Gambar 8.18(b) , diperlukan $2 \times 1 \times 2 = 4$ balok satuan, sedangkan untuk membuat balok seperti pada Gambar 8.18 (c) diperlukan $2 \times 2 \times 3 = 12$ balok satuan. Hal ini menunjukan bahwa volume suatu balok diperoleh dengan cara mengalikan ukuran panjang, lebar, dan tinggi balok tersebut.

$$\text{Volume balok} = \text{panjang} \times \text{lebar} \times \text{tinggi} = p \times l \times t$$

Untuk lebih jelasnya coba, pelajari Contoh Soal 8.7 berikut ini.

Contoh Soal 8.7

1. Diketahui sebuah balok memiliki ukuran seperti gambar di samping. Tentukan:
   a. luas permukaan balok,
   b. volume balok.

2. Sebuah akuarium berbentuk balok memiliki ukuran panjang 74 cm dan tinggi 42 cm. Jika volume air di dalam akuarium tersebut adalah 31.080 cm^3, tentukan lebar akuarium tersebut.

Jawab:

1. Diketahui p = 5 cm, l = 3 cm, dan t = 4 cm.
   a. Luas permukaan $= 2\,(pl + lt + pt)$
   $= 2\,(5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4)$
   $= 2\,(15 + 12 + 20)$
   $= 2\,(47)$
   $= 94$
   Jadi, luas permukaan balok tersebut adalah 94 cm^2.
   b. Volume balok $= p \times l \times t$
   $= 5 \times 3 \times 4$
   $= 60$ cm^2
   Jadi, volume balok tersebut adalah 60 cm^3.
2. Diketahui volume = 31.080 cm^3. p = 74 cm, dan t = 42 cm.
   Volume $= p \times l \times t$ maka $31.080 = 74 \times 1 \times 42$
   $31.080 = 3.108 \times 1$

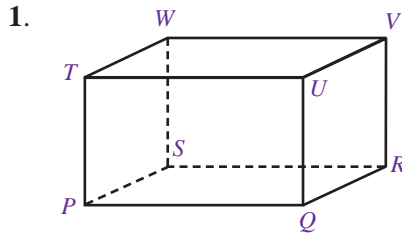
$$l = \frac{31.080}{3.108}$$

l = 10 cm

Jadi, lebar akuarium tersebut adalah 10 cm.

Uji Kompetensi 8.2

Kerjakanlah soal-soal berikut.

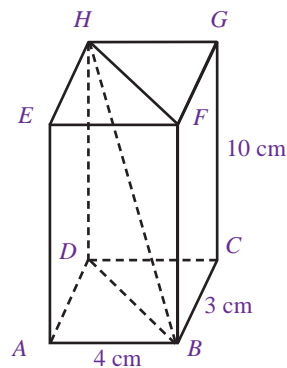
1.

Dari gambar balok *PQRS.TUVW* di atas, tentukan mana yang dimaksud dengan:

a. sisi,
b. rusuk,
c. titik sudut,
d. diagonal bidang,
e. diagonal ruang,
f. bidang diagonal.

2. Dari balok *PQRS.TUVW* pada soal nomor 1, tentukan pula:

a. sisi-sisi yang saling berhadapan,
b. rusuk-rusuk yang sejajar.

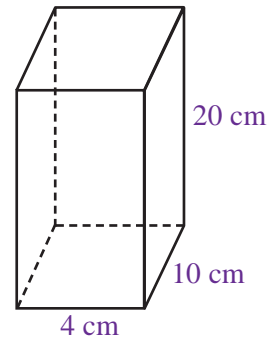
3. Gambar di samping adalah balok *ABCD.EFGH* beserta ukurannya. Dari gambar tersebut, tentukan:

a. panjang diagonal bidang *BD* dan *FH*,
b. panjang diagonal ruang *HB*
c. luas bidang diagonal *DBFH*.

4. Sebuah balok *KLMN.OPQR* memiliki ukuran panjang 4 cm, lebar 6 cm, dan tinggi 8 cm.

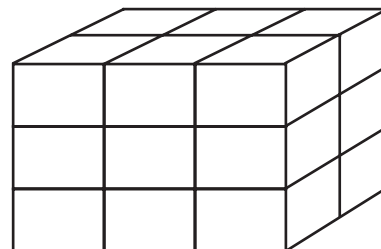
a. Gambarlah balok tersebut.
b. Tentukan bidang frontal balok tersebut.
c. Tentukan bidang ortogonal balok tersebut.

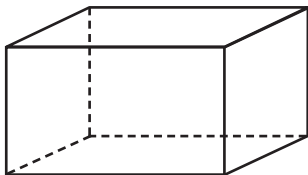
5. Buatlah sebuah jaring-jaring balok dengan ukuran sebagai berikut.

a. p = 2 cm, l = 1 cm, dan t = 2 cm
b. p = 1 cm, l = 1 cm, dan t = 2 cm
c. p = 3 cm, l = 1 cm, dan t = 2 cm

6. Sebuah balok tanpa tutup yang terbuat dari bahan karton memiliki ukuran panjang 15 cm, lebar 10 cm, dan tinggi 20 cm.

a. Gambarkan jaring-jaring balok tersebut,
b. Banyaknya karton yang dibutuhkan untuk membuat balok tersebut.

7. Luas suatu jaring-jaring balok adalah 484 cm^2. Jika jaring-jaring tersebut dibuat menjadi balok dengan panjang 10 cm dan lebar 9 cm, tentukan tinggi balok tersebut.

8. Sebuah balok dengan ukuran panjang 12 cm, lebar 8 cm, dan tinggi 12 cm, dipotong-potong menjadi beberapa balok kecil yang sama besar seperti pada gambar berikut. Tentukan:

a. ukuran panjang, lebar, dan tinggi balok yang kecil,
b. banyaknya balok yang kecil,
c. volume balok yang kecil.

9.

Sebuah kerangka balok terbuat dari sebuah kawat. Jika ukuran kerangka balok tersebut adalah 8 cm × 6 cm × 7 cm, tentukan:

a. panjang kawat yang dibutuhkan untuk membuat kerangka balok tersebut,
b. banyaknya kertas yang dibutuhkan untuk menutup seluruh permukaan balok tersebut

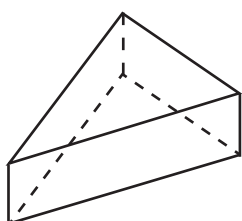
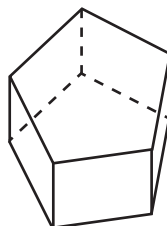
10. Volume sebuah balok adalah 385 cm^3. Jika ukuran panjang, lebar, dan tinggi balok tersebut berturut-turut adalah 11 cm, 5 cm, dan $(3 + x)$ cm, tentukan:
    a. nilai x,
    b. tinggi balok tersebut,
    c. luas permukaan balok tersebut.

C. Prisma

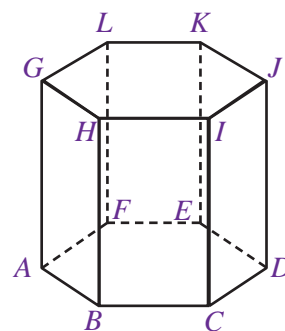
1. Pengertian Prisma

Coba kamu perhatikan benda-benda berikut ini.

Sumber: *Dokumentasi Penulis*

Kamu tentu sudah melihat benda-benda yang ditunjukkan pada gambar di atas. Gambar tersebut memperlihatkan sepotong kue dan kotak kado. Benda-benda tersebut memiliki bentuk yang sangat unik. Jika digambarkan secara geometris, benda-benda tersebut akan tampak seperti pada gambar berikut ini.

(a)

(b)

Berbeda dengan kubus dan balok, bangun ruang ini memiliki kekhasan tersendiri. Coba perhatikan bangun ruang tersebut memiliki bentuk alas dan atap yang sama bentuk dan aturannya. Selain itu, semua sisi bagian samping berbentuk persegipanjang bangun ruang ini dinamakan prisma.

Unsur-unsur apa saja yang dimiliki oleh prisma? Coba perhatikan prisma segienam *ABCDEF.GHIJKL* pada gambar 8.19 . Dari gambar tersebut, terlihat bahwa prisma segienam tersebut memiliki unsur-unsur sebagai berikut.

Gambar 8.19 : Prisma

a. Sisi/Bidang

Terdapat 8 sisi atau bidang yang dimiliki oleh prisma segienam, yaitu *ABCDEF* (sisi alas), *GHIJKL* (sisi atas), *BCIH* (sisi depan), *FEKL* (sisi belakang), *ABHG* (sisi depan kanan), *AFLG* (sisi belakang kanan), *CDJI* (sisi depan kiri), dan *DEKJ* (sisi belakang kiri).

b. Rusuk

Dari Gambar 8.19 , terlihat bahwa prisma segienam *ABCDEF.GHIJKL* memiliki 18 rusuk, 6 di antaranya adalah rusuk tegak. Rusuk-rusuk tersebut adalah *AB, BC, CD, DE, EF, FA, GH, HI, IJ, JK, KL, LG*, dan rusuk-rusuk tegaknya adalah *AG, BH, CI, DJ, EK, FL*.

c. Titik Sudut

Prisma segienam *ABCDEF.GHIJKL* memiliki 12 titik sudut. Dari Gambar 8.19 , terlihat bahwa titik-titik sudut tersebut adalah *A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K*, dan *L*.

Selain unsur-unsur yang telah disebutkan, prisma pun memiliki istilah diagonal bidang dan bidang diagonal. Untuk lebih jelasnya, coba kamu perhatikan dan pelajari uraian berikut.

Gambar 8.20 : Diagonal Bidang Prisma

d. Diagonal Bidang

Coba kamu perhatikan prisma segienam *ABCDEF. GHIJKL* pada Gambar 8.20. Dari gambar tersebut terlihat ruas garis *BG* yang terletak di sisi depan kanan (sisi tegak) ditarik dari dua titik sudut yang saling berhadapan sehingga ruas garis BG disebut sebagai diagonal bidang pada bidang prisma segienam *ABCDEF. GHIJKL*.

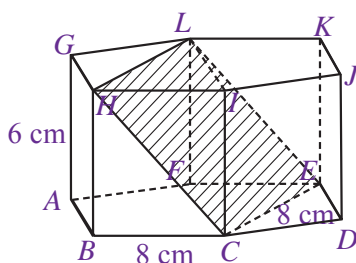
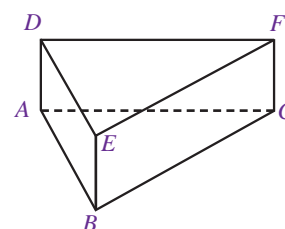
Begitu pula dengan ruas garis *CJ* pada bidang *CDIJ*. Ruas garis tersebut merupakan diagonal bidang pada prisma segienam *ABCDEF. GHIJKL*. Coba kamu sebutkan diagonal bidang yang lain dari prisma segienam pada Gambar 8.20 .

Gambar 8.21 : Bidang Diagonal Prisma

e. Bidang Diagonal

Sekarang, coba kamu perhatikan prisma segienam *ABCDEF.GHIJKL* pada Gambar 8.21 . Pada prisma segienam tersebut, terdapat dua buah diagonal bidang yang sejajar yaitu *BI* dan *FK*. Kedua diagonal bidang tersebut beserta ruas garis *KI* dan *FB* membentuk suatu bidang di dalam prisma segienam *ABCDEF.GHIJKL*. Bidang tersebut adalah bidang *BFKI* yang merupakan bidang diagonal prisma segienam. Coba kamu sebutkan bidang diagonal yang lain dari prisma segienam pada Gambar 8.21 .

Contoh Soal 8.8

1. Dari gambar prisma segitiga di samping, tentukan:
   a. sisi,
   b. rusuk,
   c. titik sudut,
   d. diagonal bidang,
   e. bidang diagonal.

2. Perhatikan gambar prisma segienam di samping. Tentukan:
   a. panjang diagonal bidang *CH*,
   b. Luas bidang diagonal *CELH*.

Jawab:

1. Dari prisma segitiga *ABC.DEF*, diperoleh
   a. sisi/bidang: *ABC*, *DEF*, *ABED*, *BCFE*, dan *ACFD*.
   b. rusuk: *AB*, *BC*, *CA*, *DE*, *EF*, *FD*, *AD*, *BE*, dan *CF*.
   c. titik sudut: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, dan *F*.
   d. diagonal bidang: *AE*, *BD*, *BF*, *CE*, *AF*, dan *DC*.
   e. bidang diagonal: *ABF*, *BCD*, *ACE*, *AEF*, *BDF*, dan *CDE*.

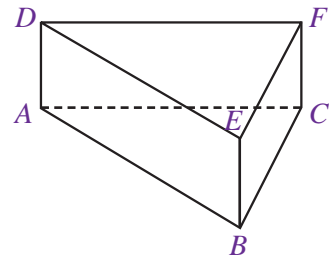
2. a. Panjang diagonal *CH* dapat dihitung menggunakan Teorema Pythagoras.
   $CH^2 = HB^2 + BC^2$
   $CH^2 = 6^2 + 8^2$
   $CH^2 = 36 + 64$
   $CH^2 = 100$
   $CH^2 = \sqrt{100}$
   $CH^2 = 10$ cm
   Jadi, panjang diagonal bidang *CH* adalah 10 cm.
   b. Luas bidang *CELH* = luas persegipanjang *CELH*
   $= p \times l$
   $= CH \times CE$
   $= 10 \times 8$
   $= 80$
   Jadi, luas bidang diagonal *CELH* adalah 64 cm^2.

Plus +

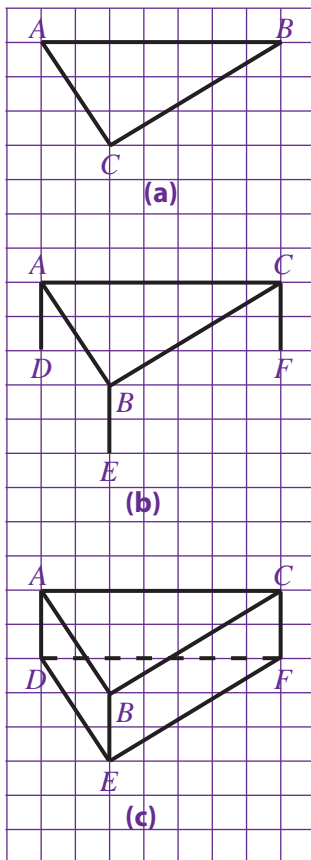
Penamaan prisma didasarkan pada bentuk sisi alasnya. Misalnya, prisma yang sisi alasnya berbentuk segitiga dinamakan prisma segitiga, prisma yang sisi alasnya berbentuk segiempat dinamakan prisma segiempat, dan seterusnya.

2. Sifat-Sifat Prisma

Perhatikan prisma *ABC.DEF* pada gambar di samping. Secara umum, sifat-sifat prisma adalah sebagai berikut.

a. Prisma memiliki bentuk alas dan atap yang kongruen.
   Pada gambar terlihat bahwa segitiga *ABC* dan *DEF* memiliki ukuran dan bentuk yang sama.
b. Setiap sisi bagian samping prisma berbentuk persegipanjang. Prisma segitiga pada gambar dibatasi oleh tiga persegipanjang di setiap sisi sampingnya, yaitu *ABED*, *BCFE*, dan *ACFD*.
c. Prisma memiliki rusuk tegak.
   Perhatikan prisma segitiga pada gambar. Prisma tersebut memiliki tiga buah rusuk tegak, yaitu *AD*, *BE*, dan *CF*. Rusuk tersebut dikatakan tegak karena letaknya tegak lurus terhadap bidang alas dan atas. Dalam kondisi lain, ada juga prisma yang rusuknya tidak tegak, prisma tersebut disebut prisma sisi miring.
d. Setiap diagonal bidang pada sisi yang sama memiliki ukuran yang sama.
   Prisma segitiga *ABC.DEF* pada gambar diagonal bidang pada sisi *ABED* memiliki ukuran yang sama panjang. Perhatikan bahwa *AE* = *BD*, *BF* = *CE*, dan *AF* = *CD*.

3. Menggambar Prisma

Sama seperti menggambar kubus dan balok, menggambar prisma pun akan lebih baik dilakukan pada kertas berpetak. Misalkan, prisma yang digambar adalah prisma segitiga. Berikut ini adalah langkah-langkah yang harus dilakukan dalam menggambar prisma segitiga.

a. Langkah pertama, gambarlah sebuah segitiga, baik segitiga siku-siku, sama sisi, sama kaki, maupun segitiga sebarang. Segitiga tersebut berperan sebagai sisi atas dari sebuah prisma. Pada Gambar 8.22 (a), segitiga yang dibuat adalah segitiga *ABC* (segitiga sebarang).

Gambar 8.22 : Segitiga

b. Kemudian, dari setiap ujung segitiga *ABC*, yaitu titik *A*, *B*, dan *C*, dibuat garis lurus dengan arah vertikal. Pada Gambar 8.22 (b) , terlihat ada tiga ruas garis yang ditarik dari ujung-ujung segitiga *ABC*. Tiga ruas garis itu adalah ruas garis *AD*, *BE*, dan *CF* yang semuanya memiliki ukuran sama panjang. Tiga ruas tersebut merupakan rusuk tegak dari prisma yang akan dibuat.

c. Langkah selanjutnya, hubungkan ujung ruas garis yang telah dibuat. Hasilnya adalah sebuah sisi/bidang *DEF* yang merupakan sisi alas dari prisma segitiga. Perlu diingat garis *DF* digambar putus-putus karena garis tersebut terletak di belakang prisma.

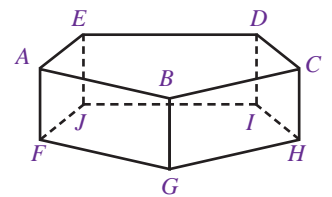
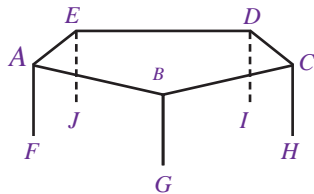
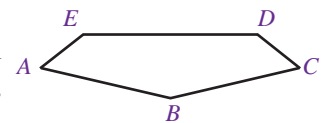
Contoh Soal 8.9

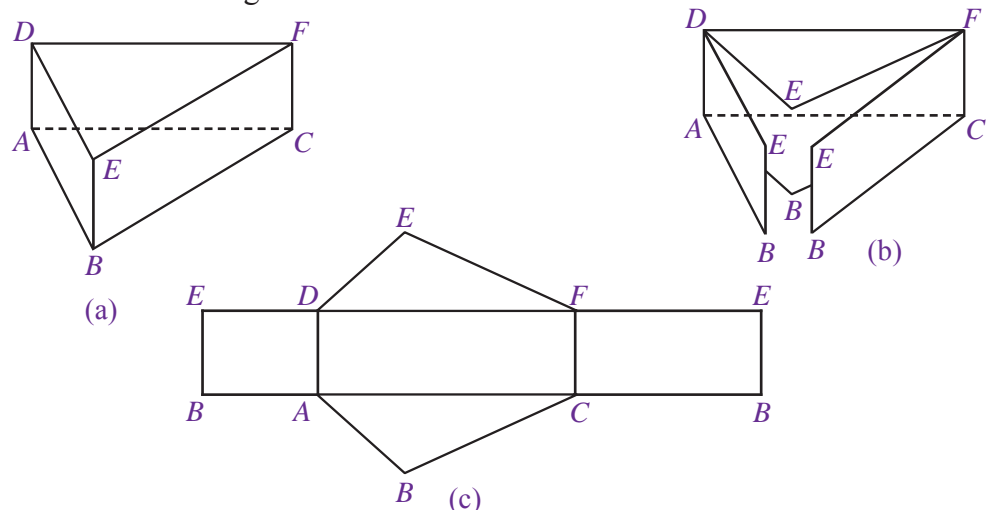
Buatlah prisma segilima menggunakan cara yang telah dipelajari sebelumnya.

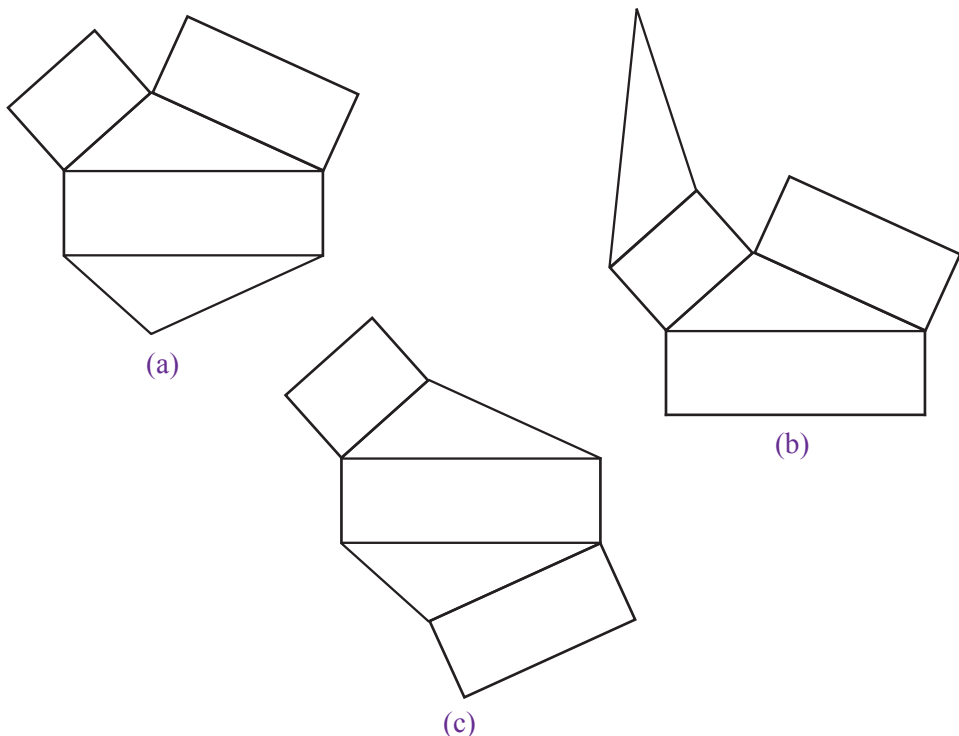
Jawab:

- Langkah pertama, buatlah segilima yang berperan sebagai sisi atas dari prisma segilima. Misalkan, segilima tersebut adalah segilima *ABCDE*.

- Langkah kedua, buat rusuk tegak yang sama panjang dari setiap ujung segilima *ABCDE*. Berarti, ada lima rusuk tegak yang dibuat yaitu garis *AF, BG, CH, DI,* dan *EJ*.

- Langkah ketiga, menghubungkan setiap ujung garis yangtelahdibuatsebelumnya.Artinyamenghubungkan titik *F, G, H, I* dan *J* sehingga membentuk segilima yang sama bentuk dan ukurannya dengan segilima bagian atas. Segilima *FGHIJ* merupakan alas dari prisma yang sedang dibuat

4. Jaring-jaring Prisma

Jaring-jaring prisma diperoleh dengan cara mengiris beberapa rusuk prisma tersebut sedemikian sehingga seluruh permukaan prisma terlihat. Misalkan, prisma yang akan dibuat jaring-jaringnya adalah prisma segitiga. Berikut ini adalah alur pembuatan jaring-jaring prisma segitiga. Coba kamu perhatikan Gambar 8.23 dengan saksama.

Gambar 8.23 : Alur Pembuatan Jaring-jaring Prisma.

Dari Gambar 8.24 , terlihat bahwa jaring-jaring prisma memiliki tiga persegipanjang sebagai sisi tegak dan dua segitiga sebagai sisi alas dan sisi atas. Berikut ini adalah berapa jaring-jaring prisma segitiga yang lain.

Gambar 8.24 : Beberapa contoh Jaring-jaring Prisma.

Terdapat beberapa macam bentuk jaring-jaring prisma segitiga yang dapat dibuat. Semuanya bergantung pada cara mengiris beberapa rusuk prisma segitiga tersebut. Coba kamu tentukan bentuk jaring-jaring prisma segitiga yang lain.

Sekarang, bagaimana dengan jaring-jaring prisma yang lain? Misalnya, prisma segilima atau prisma segienam. Untuk menjawabnya, coba kamu perhatikan atau pelajari Contoh Soal 8.10

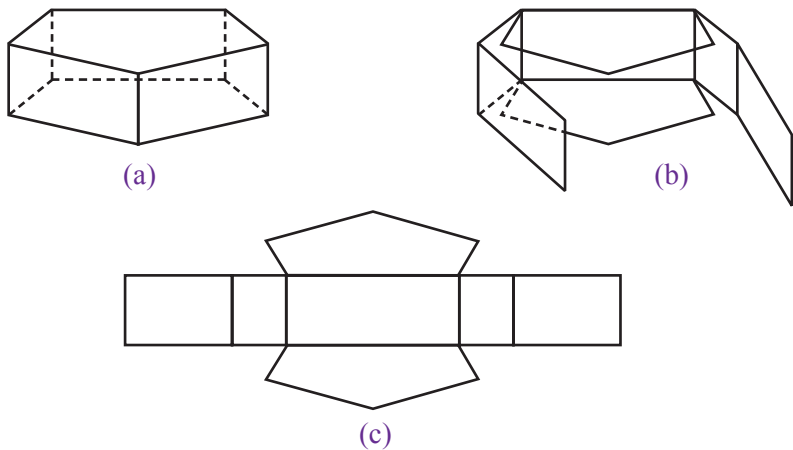
Contoh Soal 8.10

Buatlah salah satu jaring-jaring dari prisma berikut:

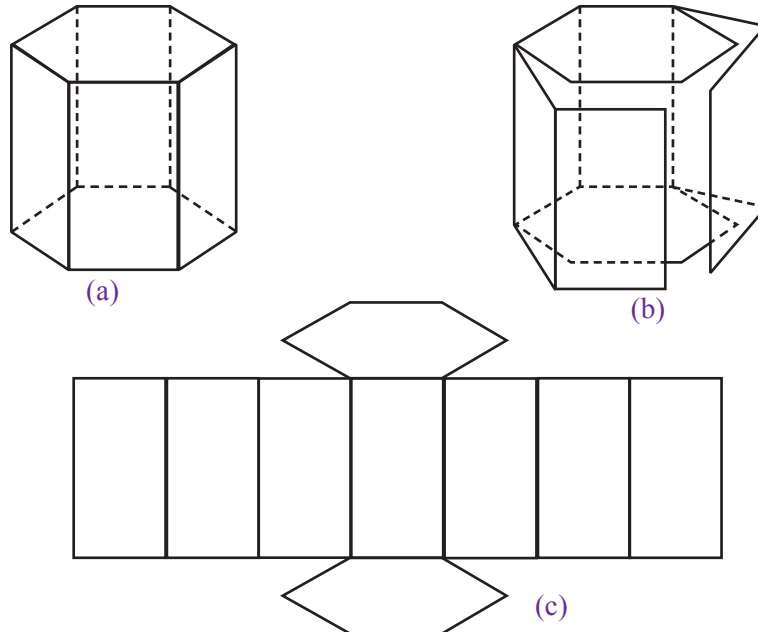
a. prisma segilima,

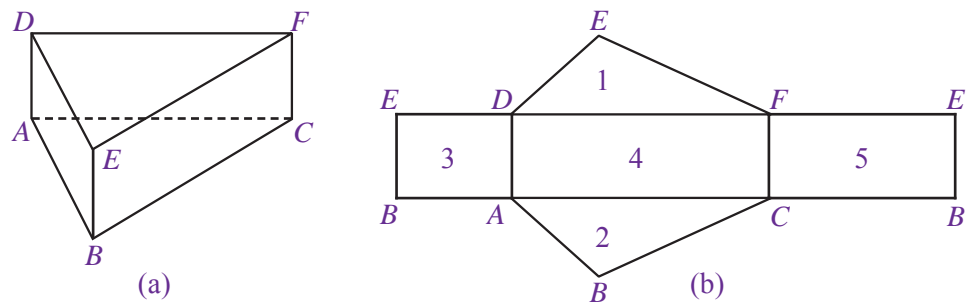
b. prisma segienam.

Jawab:

a. Jaring-jaring prisma segilima.

Plus +

Kubus dan balok memiliki sisi alas dan sisi atas yang sama bentuk dan ukurannya. Oleh karena itu, kubus dan balok termasuk prisma.

b. Jaring-jaring prisma segienam.

5. Luas Permukaan Prisma

Sama seperti kubus dan balok, luas permukaan prisma dapat dihitung menggunakan jaring-jaring prisma tersebut. Caranya adalah dengan menjumlahkan semua luas bangun datar pada jaring-jaring prisma. Coba kamu perhatikan prisma segitiga beserta jaring-jaringnya pada Gambar 8.30 berikut ini.

Gambar 8.25 : Prisma segitiga dan jaring-jaringnya.

Dari Gambar 8.25 terlihat bahwa prisma segitiga *ABC.DEF* memiliki sepasang segitiga yang identik dan tiga buah persegipanjang sebagai sisi tegak. Dengan demikian, luas permukaan prisma segitiga tersebut adalah

luas permukaan prisma = luas ΔABC + luas ΔDEF + luas $EDAB$ + luas $DFCA$ + luas $FEBC$

= 2 · luas ΔABC + luas $EDBA$ + luas $DFAC$ + luas $FEBC$

= (2 · luas alas) + (luas bidang-bidang tegak)

Jadi, luas permukaan dapat dinyatakan dengan rumus sebagai berikut.

Luas permukaan prisma = 2 · luas alas + luas bidang-bidang tegak

Contoh Soal 8.11

Perhatikan prisma segitiga siku-siku pada gambar di samping. Tentukan:

a. luas permukaan prisma keseluruhan,

b. luas permukaan prisma tanpa tutup.

Jawab:

a. Luas permukaan prisma *PQRSTU*

$= (2 \times \text{luas } \Delta PQR) + (\text{luas } PQTS + \text{luas } QRUT + \text{luas } RPSU)$

$= (2 \times \frac{PR \times RQ}{2}) + (PQ \times QT + QR \times RU + RP \times PS)$

$= (2 \times \frac{8 \times 6}{2}) + (10 \times 7 + 6 \times 7 + 8 \times 7)$

$= 48 \text{ cm}^2 + 70 \text{ cm}^2 + 42 \text{ cm}^2 + 56 \text{ cm}^2$

$= 216 \text{ cm}^2$

Jadi, luas permukaan prisma segitiga tersebut adalah 216 cm^2.

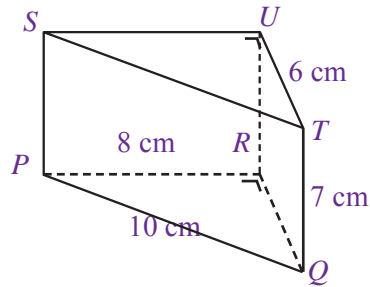
b. Luas permukaan prisma *PQRSTU* tanpa tutup

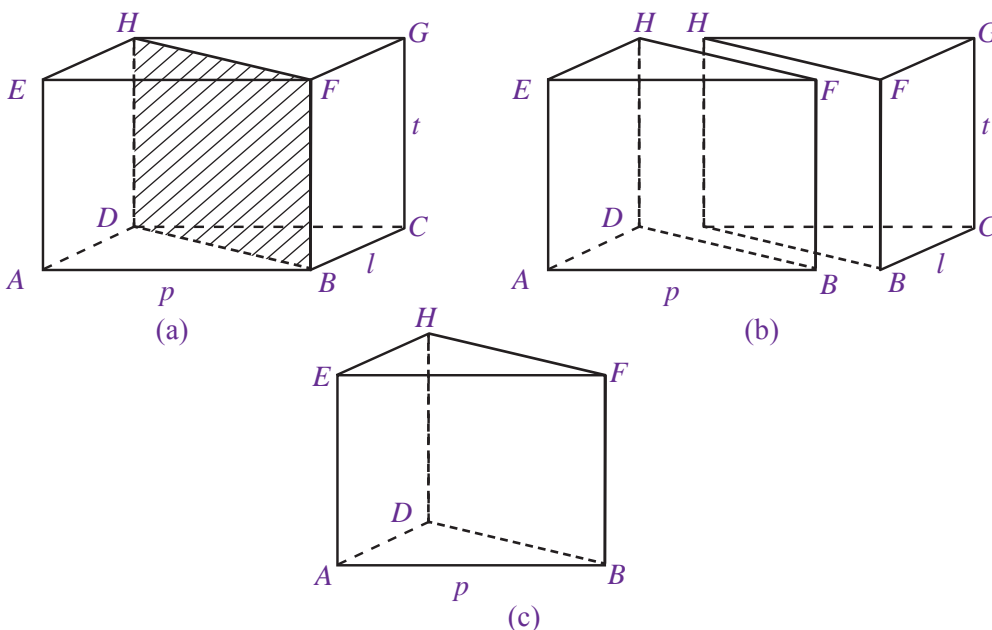
$= \text{luas } \Delta PQR + (\text{luas } PQTS + \text{luas } QRUT + \text{luas } RPSU)$

$= \frac{PR \times RQ}{2} + (PQ \cdot QT + QR \cdot RU + RP \cdot PS)$

$= \frac{8 \times 6}{2} + (10 \cdot 7 + 6 \cdot 7 + 8 \cdot 7)$

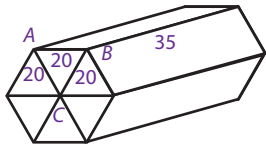
$= 24 + 70 + 42 + 56 = 192$

Jadi, luas permukaan prisma segitiga tanpa tutup adalah 192 cm^2

6. Volume Prisma

Untuk mengetahui rumus volume prisma, perhatikan Gambar 8.31 berikut.

Gambar 8.26 : Balok dan Prisma

Gambar 8.26 memperlihatkan sebuah balok *ABCD.EFGH* yang dibagi dua secara melintang. Ternyata, hasil belahan balok tersebut membentuk prisma segitiga, seperti pada Gambar 8 .26 (b). Perhatikan prisma segitiga *BCD.FGH* pada Gambar 8.26 (c) . Dengan demikian, volume prisma segitiga adalah setengah kali volume balok.

Problematika

Perhatikan gambar berikut.

a. Hitunglah luas Δ *ABC*.
b. Hitunglah volume bangun tersebut.
c. Hitunglah luas permukaan bangun tersebut.

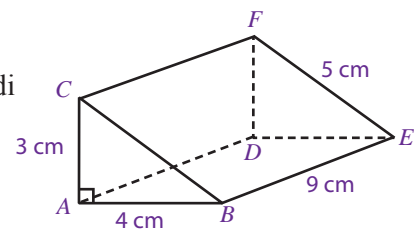
$$\text{Volume prisma } BCD.FGH = \frac{1}{2} \times \text{volume balok } ABCD.EFGH$$
$$= \frac{1}{2} \times (p \times l \times t)$$
$$= (\frac{1}{2} \times p \times l) \times t$$
$$= \text{luas alas} \times \text{tinggi}$$

Jadi, volume prisma dapat dinyatakan dengan rumus sebagai berikut.

Volume prisma = luas alas × tinggi

Agar kamu lebih memahami materi ini, coba perhatikan dan pelajari Contoh Soal 8.12 secara seksama.

Contoh Soal 8.12

1. Perhatikan prisma segitiga pada gambar di samping. Dari gambar tersebut, tentukan:
   a. luas alas prisma segitiga,
   b. volume prisma segitiga.
2. Sebuah prisma memiliki volume 238 cm^3 dan luas alas 34 cm^2. Tentukan tinggi prisma tersebut.

Jawab:

1. a. Luas alas prisma segitiga *ABC.DEF* adalah luas Δ*ABC*, sehingga

$$\text{luas } \Delta ABC = \frac{AB \quad AC}{2}$$
$$= \frac{4 \times 3}{2}$$
$$= 6$$

Jadi, luas alas prisma segitiga *ABC.DEF* adalah 6 cm^3.

b. Volume prisma = luas alas × tinggi
$$= 6 \times 9$$
$$= 54$$
Jadi, volume prisma segitiga *ABC.DEF* adalah 54 cm^3.

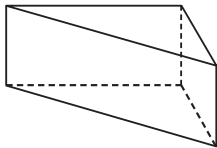
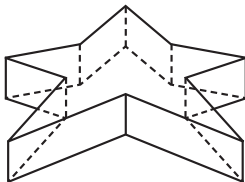
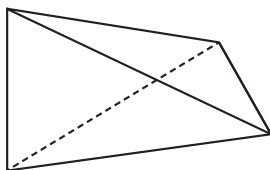
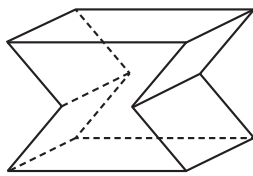
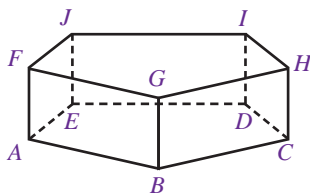
2. Volume prisma = luas alas × tinggi 238 cm^3 = 34 × tinggi

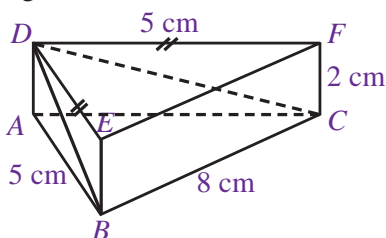
$$\text{tinggi} = \frac{238}{34}$$
$$\text{tinggi} = 7$$

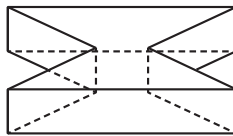
Jadi, tinggi prisma tersebut adalah 7 cm

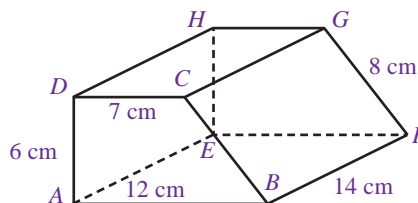
Uji Kompetensi 8.3

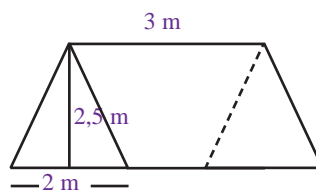
Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Tentukan apakah bangun ruang berikut merupakan prisma atau bukan. Jika ya, tentukan jenis prisma yang dimaksud.
   a.
   b.
   c.
   d.

2.

   Dari gambar prisma segilima di atas, tentukan unsur-unsur berikut.
   a. Sisi/bidang
   b. Rusuk
   c. Titik sudut
   d. Diagonal bidang

3. Diketahui sebuah prisma segitiga samakaki seperti pada gambar berikut. Tentukan:

   a. panjang diagonal bidang *DB*,
   b. panjang diagonal bidang *DC*,
   c. Luas bidang *BCD*.

4.

   Dari gambar prisma di atas, buatlah tiga macam bentuk jaring-jaring prisma tersebut.

5. Perhatikan gambar berikut.

   Dari gambar prisma segiempat tersebut, tentukan:
   a. panjang seluruh rusuk,
   b. luas alas prisma (luas *ABCD*),
   c. luas permukaan prisma *ABCD.EFGH*,
   d. volume prisma *ABCD.EFGH*.

6.

   Sebuah tenda memiliki ukuran seperti pada gambar di atas, tentukan:
   a. luas permukaan tenda kemah tersebut,
   b. volume tenda tersebut.

7. Sebuah prisma memiliki luas alas dan tinggi berturut-turut adalah 52 cm^2 dan 8 cm. Hitunglah volume prisma tersebut.

8. Volume sebuah prisma adalah 200 cm^2. Jika tinggi prisma adalah 8 cm, tentukan luas alas prisma tersebut.

9. Lengkapilah tabel berikut.

Luas Alas Prisma	Tinggi Prisma	Volume Prisma
23 m^2	15 m	...
15 cm^2	...	300 cm^3
...	11 cm	165 cm^3
19 cm^2	8 cm	...
45 cm^2	...	225 cm^3

10. Sebuah kawat sepanjang 135 cm akan dibuat kerangka prisma segitiga. Jika panjang seluruh rusuk prisma segitiga tersebut memiliki ukuran yang sama panjang, tentukanlah:
    a. panjang rusuk dan tinggi prisma tersebut,
    b. luas permukaan prisma segitiga tersebut,
    c. volume prisma segitiga tersebut.

Sumber: *chabib.files.wordpress.com*

Gambar 8.27 : Piramida.

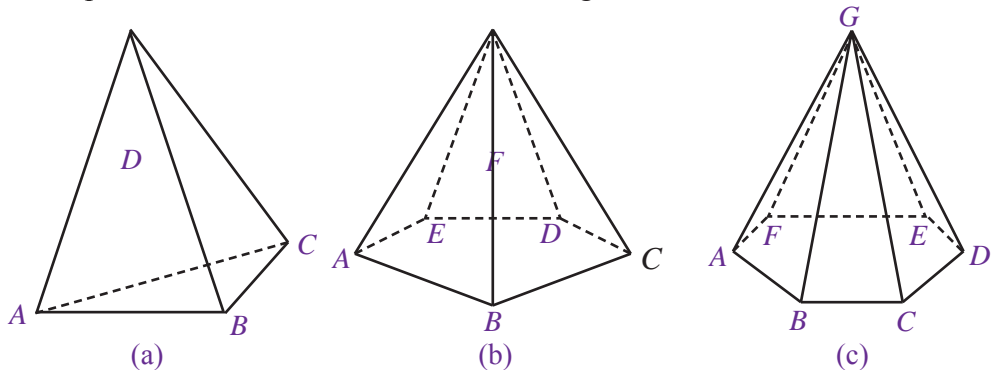
D. Limas

Kamu pasti telah mengenal bangunan piramida di Mesir, bukan? Kamu mungkin juga telah melihatnya, baik itu dari atlas, buku pelajaran, televisi, ataupun melihatnya langsung. Sebagai salah satu keajaiban dunia, piramida digunakan sebagai makam raja-raja Firaun pada jaman dahulu.

1. Pengertian Limas

Jika digambarkan ke dalam bentuk geometri, bangunan piramida pada Gambar 8.27 akan tampak seperti Gambar 8.28 . Bangun ruang tersebut memiliki 5 buah sisi dan memiliki titik puncak. Berbeda halnya dengan prisma yang memiliki bidang samping berbentuk persegipanjang, bangun ruang tersebut memiliki bidang samping yang berbentuk segitiga. Bangun ruang tersebut disebut **limas segiempat.** Gambar 8.28 menunjukan sebuah limas segiempat *E. ABCD.*

Gambar 8.28 : Bentuk geometri piramida.

Berdasarkan bentuk alasnya, limas memiliki berbagai macam nama. Coba kamu perhatikan Gambar 8.29 berikut ini dengan saksama.

Gambar 8.29 : Beberapa Limas

Limas-limas yang ditunjukkan pada Gambar 8.29 berturut-turut adalah limas segitiga, limas segilima, dan limas segienam. Secara umum, unsur-unsur yang dimiliki oleh sebuah limas sebagai berikut.

a. Sisi/Bidang

Coba kamu perhatikan lagi bentuk limas pada Gambar 8.28 . Dari gambar tersebut, terlihat bahwa setiap limas memiliki sisi samping yang berbentuk segitiga. Pada limas segiempat *E.ABCD*, sisi-sisi yang terbentuk adalah sisi *ABCD* (sisi alas), *ABE* (sisi depan), *DCE* (sisi belakang), *BCE* (sisi samping kiri), dan *ADE* (sisi samping kanan).

b. Rusuk

Perhatikan kembali limas segiempat *E.ABCD* pada Gambar 8 .28. Limas tersebut memiliki 4 rusuk alas dan 4 rusuk tegak. Rusuk alasnya adalah *AB, BC, CD,* dan *DA*. Adapun rusuk tegaknya adalah *AE, BE, CE*, dan *DE.*

c. Titik Sudut

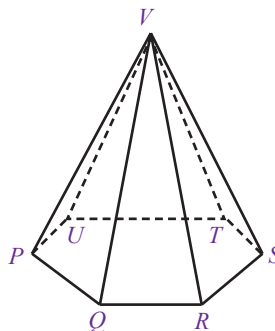
Jumlah titik sudut suatu limas sangat bergantung pada bentuk alasnya. Setiap limas memiliki titik puncak (titik yang letaknya atas). Coba kamu perhatikan limas-limas pada Gambar 8.28 dan Gambar 8.29 . Limas segitiga memiliki 4 titik sudut, limas segiempat memiliki 5 titik sudut, limas segilima memiliki 6 titik sudut, dan limas segienam memiliki 7 titik sudut.

Contoh Soal 8.13

Dari gambar limas segienam *V.PQRSTU* di samping, tentukan:

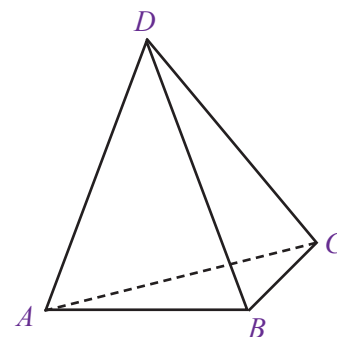
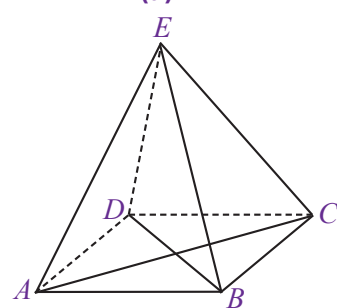
a. sisi alas dan sisi tegak,
b. rusuk alas dan rusuk tegas,
c. titik sudut.

Jawab:

a. Sisi alas : *PQRSTU*
   Sisi tegak : *PQV, QRV, RSV, STV, TUV*, dan *UPV.*
b. Rusuk alas : *PQ, QR, RS, ST, TU,* dan *UP.* dan
   Rusuk tegak : *PV, QV, RV, SV, TV,* dan *UV*
c. Titik sudut : *P, Q, R, S, T, U,* dan *V*

2. Sifat-Sifat Limas

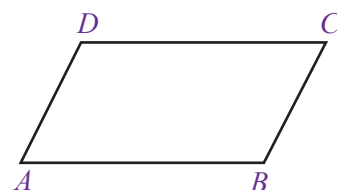
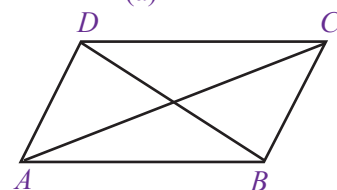
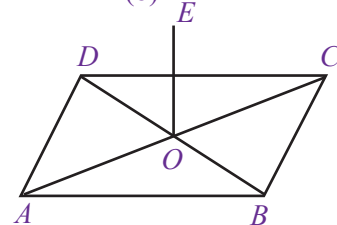
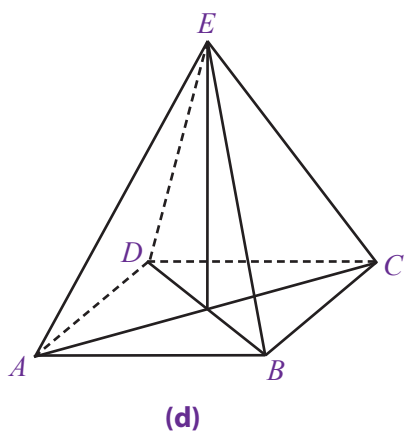
Untuk bentuk limas tertentu, misalnya limas segitiga atau limas segiempat, ada beberapa sifat yang perlu kamu ketahui. Gambar 8.30 (a) menunjukkan sebuah limas segitiga *D.ABC*. Pada limas segitiga *D. ABC,* semua sisi limas tersebut berbentuk segitiga. Coba kamu amati sisi-sisi limas *ABC, ABD, BCD*, dan *ACD.* Semuanya berbentuk segitiga. Jika limas segitiga memiliki semua sisi yang berbentuk segitiga samasisi, maka limas tersebut disebut **limas segitiga beraturan**.

Gambar 8.30

Perhatikan limas segiempat *E. ABCD* pada Gambar 8.30 (b) di samping. Dari gambar tersebut terlihat bahwa limas segiempat memiliki alas berbentuk persegipanjang. Sesuai dengan sifatnya, setiap diagonal persegipanjang memiliki ukuran yang sama panjang. Jadi, limas segiempat memiliki diagonal alas yang sama panjang. Perhatikan Gambar 8.30(b) , panjang diagonal alas *AC* dan *BD* memiliki ukuran yang sama panjang.

3. Menggambar Limas

Secara umum yang perlu diperhatikan dalam proses menggambar limas adalah alasnya. Jadi, yang pertama kali dibuat adalah alas limas tersebut. Misalkan limas yang akan dibuat adalah limas segiempat. Langkah-langkah yang harus dilakukan dalam menggambar limas adalah sebagai berikut.

a. Buatlah persegipanjang yang akan dijadikan alas limas. Gambar 8.30(a) menunjukkan persegipanjang *ABCD* yang akan dijadikan alas limas. Persegipanjang tersebut digambarkan menyerupai jajargenjang. Hal ini disebabkan karena bidang *ABCD* termasuk bidang ortogonal. Masih ingatkah kamu apa yang dimaksud dengan bidang ortogonal?
b. Langkah selanjutnya, buatlah garis diagonal pada bidang *ABCD* yang telah kamu buat. Dari Gambar 8.30(b), terlihat bahwa garis diagonal yang dimaksud adalah *AC* dan *BD.*
c. Dari titik potong dua diagonal yang telah dibuat, misalkan titik *O*, buatlah ruas garis yang tegak lurus dengan bidang alas *ABCD.* Ruas garis ini, yaitu ruas garis *OE* merupakan tinggi limas yang akan dibuat. Perhatikan Gambar 8.30(c) . Titik *E* merupakan titik puncak limas yang akan dibuat.

(d)

Gambar 8.30 : Menggambarkan Limas

d. Langkah terakhir, yaitu membuat ruas garis dari setiap ujung bidang alas limas, yaitu titik *A, B, C*, dan *D* ke titik puncak limas (titik *E*). Dari Gambar 8.37(d) terlihat bahwa ada 4 ruas garis yang dibuat, yaitu ruas garis *AE, BE, CE*, dan *DE*.

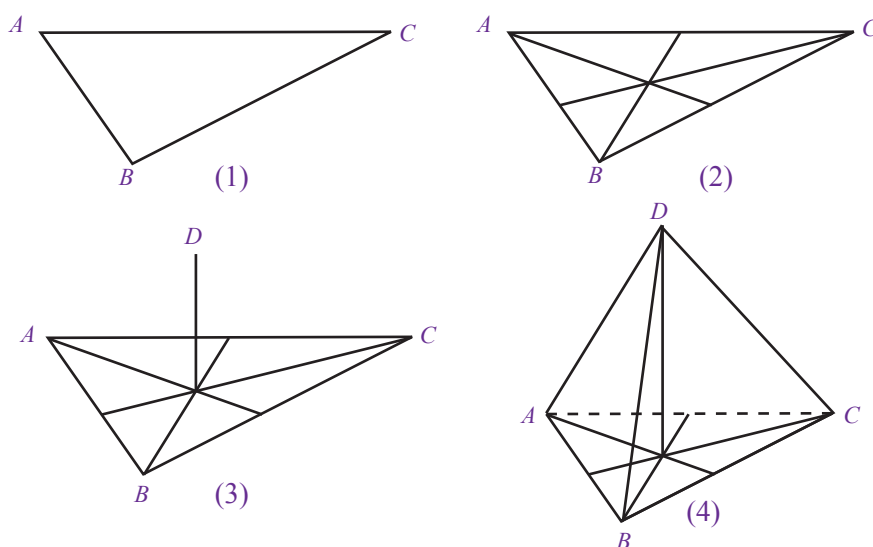
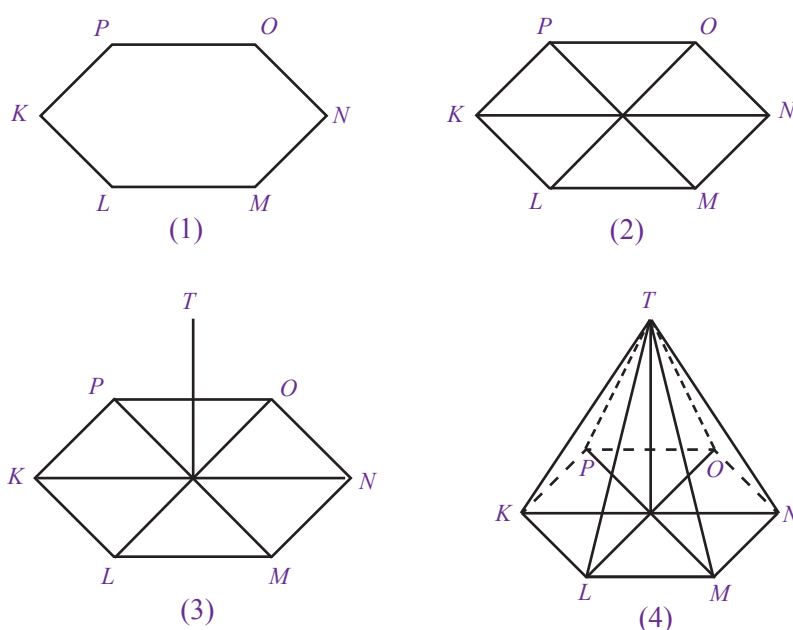
Agar kamu lebih memahami cara menggambar limas, pelajarilah Contoh Soal 8.14 berikut ini.

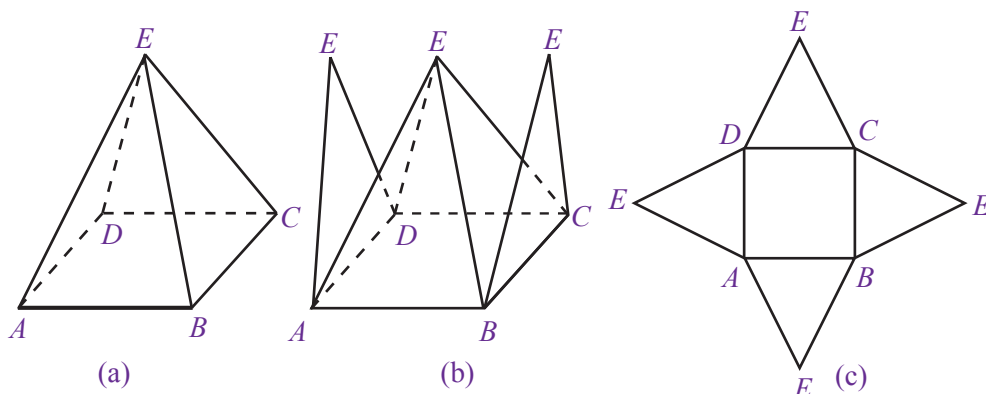
Contoh Soal 8.14

Dengan menggunakan teknik menggambar limas, gambarlah limas-limas berikut ini.

a. Limas segitiga *D.ABC*
b. Limas segienam *T. KLMNOP*

Jawab:

a. Menggambar limas segitiga dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

b. Menggambar limas segienam dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

4. Jaring-Jaring Limas

Seperti bangun ruang lainnya, jaring-jaring limas diperoleh dengan mengiris beberapa rusuknya, kemudian direbahkan. Untuk lebih jelasnya, pelajari Gambar 8.31 berikut.

Gambar 8.31 : Alur pembuatan jaring-jaring limas.

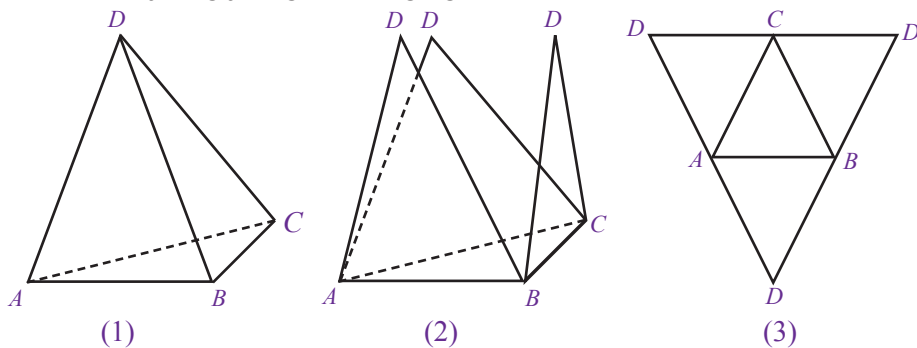
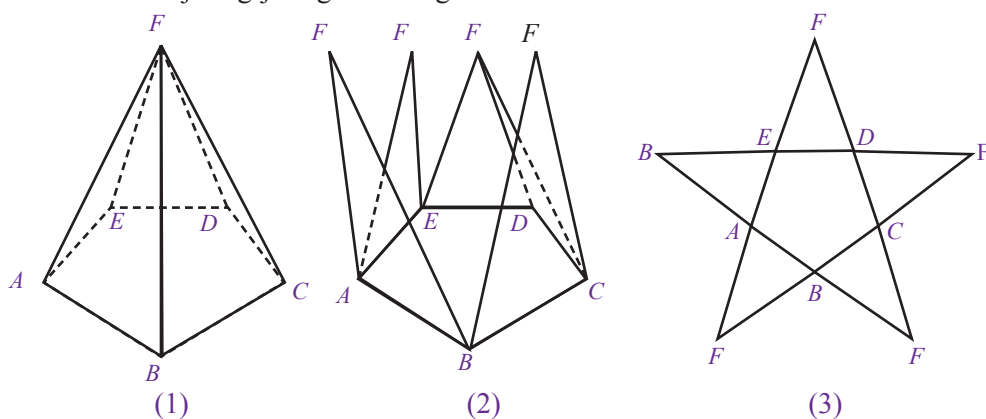
Gambar 8.31 memperlihatkan cara memperoleh jaring-jaring limas segiempat. Bagaimanakah memperoleh jaring-jaring limas segitiga? Bagaimanakah pula dengan prisma segilima? Untuk lebih jelasnya, coba kamu perhatikan Contoh Soal 8.15

Contoh Soal 8.15

Buatlah jaring-jaring kedua limas berikut ini.

a. Limas segitiga b. Limas segilima

Jawab:

a. Membuat jaring-jaring limas segitiga.

b. Membuat jaring-jaring limas segilima.

5. Luas Permukaan Limas

Sama halnya dengan prisma, luas permukaan limas pun dapat diperoleh dengan cara menentukan jaring-jaring limas tersebut. Kemudian, menjumlahkan luas bangun datar dari jaring-jaring yang terbentuk. Untuk lebih jelasnya, coba kamu pelajari uraian berikut.

Gambar 8.32 : Limas segiempat *E.ABCD* dan jaring-jaringnya.

Plus +

Di dalam bahasa Inggris, kubus, balok, prisma, dan limas berturut-turut dinamakan *cube*, *cuboid*, *prism*, dan *pyramid*.

Gambar 8.32 memperlihatkan sebuah limas segiempat *E.ABCD* beserta jaring-jaringnya. Dengan demikian, luas permukaan limas tersebut adalah sebagai berikut.

Luas permukaan limas $E.ABCD$ = luas $ABCD$ + luas ΔABE + luas ΔBCE + luas ΔCDE + luas ΔADE

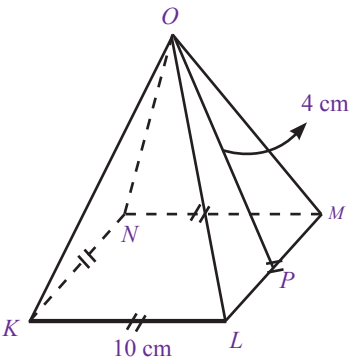
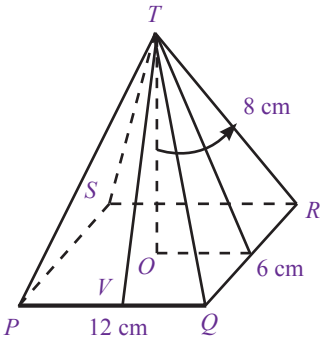
= luas $ABCD$ + (luas ΔABE + luas ΔBCE + luas ΔCDE + luas ΔADE)

Secara umum, luas permukaan limas adalah sebagai berikut.

Luas permukaan limas = luas alas + jumlah luas sisi-sisi tegak

Contoh Soal 8.16

1. Diketahui sebuah limas *T. PQRS* seperti pada gambar di samping. Tentukan:
   a. panjang *TU*,
   b. panjang *TV*,
   c. luas alas,
   d. luas permukaan.

2. Perhatikan gambar berikut.

Dari gambar limas *O.KLMN* tersebut, tentukan:
a. luas alas,
b. luas sisi tegak,
c. luas permukaan.

Jawab:

1. a. *TU* merupakan sisi miring segitiga siku-siku *TOU*. Menurut Teorema Pythagoras,

$TU^2 = TO^2 + OU^2$
$= (8) + (6)$
$= 64 + 36$
$= 100$
$TU = 10$

Jadi, panjang TU adalah 10 cm.

b. *TV* merupakan sisi miring segitiga siku-siku *TOV*. Menurut Teorema Pythagoras.

$TV^2 = TV^2 + UV^2$
$= (8) + (3)$
$= 64 + 9$
$= 73$
$TV = \sqrt{73}$

Jadi, panjang *TV* adalah $\sqrt{73}$ cm .

c. Luas alas = luas sisi *PQRS*

$= PQ \times QR$
$= 12 \times 6$
$= 72$

Jadi, luas alas limas *T.PQRS* adalah 72 cm².

d. Luas permukaan limas = luas alas + luas semua sisi tegak

= luas *PQRS* + (luas ΔPQT + luas ΔQRT + luas ΔRST + luas ΔSPT)

$$= 72 \text{ cm}^2 + \left(\frac{\sqrt{73} \times 12}{2} + \frac{10 \times 6}{2} + \frac{\sqrt{73} \times 12}{2} + \frac{10 \times 6}{2}\right)$$

$= 72 + (6\sqrt{73} + 30 + 6\sqrt{73} + 30)$
$= 72 + (12\sqrt{73} + 60)$
$= 132 + (12\sqrt{73})$

Jadi, luas permukaan limas tersebut adalah $(132 + 12\sqrt{73})$ cm².

2. a. Luas alas limas = luas persegi *KLMN*

$= KL \times MN$
$= 10 \times 4$
$= 40$

Jadi, luas alas limas *O.KLMN* adalah 40 cm².

b. Luas sisi tegak = 4 × luas sisi segitiga

$$= 4 \times \left(\frac{4 \times 10}{2}\right)$$

$= 4 \times 20$
$= 80$

Jadi, luas sisi tegak limas *O.KLMN* adalah 80 cm².

c. Luas permukaan limas = luas alas + luas sisi tegak

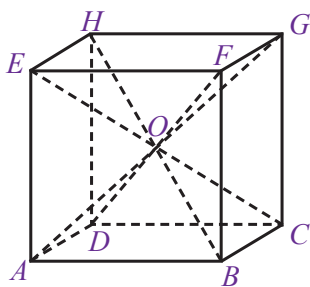
$= 40 + 48$
$= 88$

Jadi, luas permukaan limas *O.KLMN* adalah 88 cm².

Tiga jenis bangun ruang yang paling mendasar adalah kubus, piramida, dan bola. Pemahaman tentang bangun-bangun ini sangat penting dalam bidang sains dan teknik. Bangsa Mesir Kuno menggunakan pengetahuan mereka tentang bangun-bangun ruang untuk tujuan-tujuan yang praktis seperti pembangunan piramida. Misalkan, Piramida Besar Khufu di Gizeh. Rusuk-rusuk alas piramida tersebut berukuran 230 m dan tingginya sekitar 146 m. Setiap sisinya miring pada sudut yang tepat sehingga keempat sisi piramida tersebut bertemu di puncaknya. Ini merupakan prestasi yang luar biasa mengingat bahwa saat itu pengetahuan matematika mereka terbatas.

Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*, 2002

6. Volume Limas

Gambar 8.33 menunjukkan sebuah kubus *ABCD.EFGH*. Kubus tersebut memiliki 4 buah diagonal ruang yang saling berpotongan di titik *O*. Jika diamati secara cermat, keempat diagonal ruang tersebut membentuk 6 buah limas segiempat, yaitu limas segiempat *O.ABCD, O.EFGH, O.ABFE, O.BCGF, O.CDHG*, dan *O.DAEH*. Dengan demikian, volume kubus *ABCD.*EFGH merupakan gabungan volume keenam limas tersebut.

Gambar 8.33 : Kubus dan Limas

6 × volume limas *O.ABCD* = volume kubus *ABCD.EFGH*

$$\begin{aligned}\text{volume limas } O.ABCD &= \frac{1}{6} \times AB \times BC \times CG \\ &= \frac{1}{6} \times s \times s \times s \\ &= \frac{1}{6} \times s^2 \times s \\ &= \frac{1}{6} \times s^2 \times \frac{2s}{2} \\ &= \frac{2}{6} \times s^2 \times \frac{s}{2} \\ &= \frac{1}{3} \times s^2 \times \frac{s}{2}\end{aligned}$$

Oleh karena s^2 merupakan luas alas kubus *ABCD.EFGH* dan $\frac{s}{2}$ merupakan tinggi limas *O.ABCD* maka

$$\begin{aligned}\text{Volume limas } O.ABCD &= \frac{1}{3} \times s^2 \times \frac{s}{2} \\ &= \frac{1}{3} \times \text{luas alas limas} \times \text{tinggi limas}\end{aligned}$$

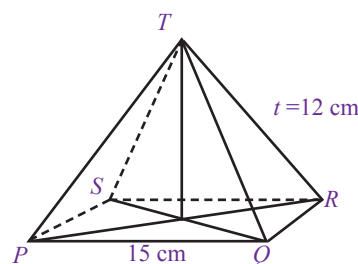
Jadi, rumus volume limas dapat dinyatakan sebagai berikut.

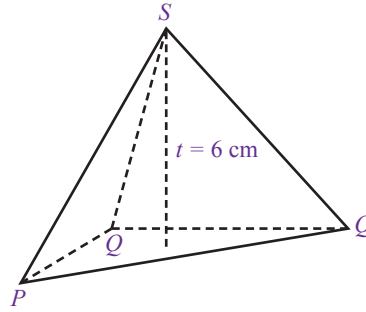
$$\text{Volume limas} = \frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi}$$

Rumus tersebut berlaku untuk menentukan volume limas-limas yang lain.

Agar kamu lebih memahami materi ini, coba pelajari Contoh Soal 8.19 berikut ini.

Contoh Soal 8.17

1. Perhatikan gambar limas segiempat di samping. Tentukan:
   a. luas alas limas,
   b. volume limas.

2. Volume sebuah limas adalah 126 cm^3. Jika tinggi limas tersebut adalah 14 cm, tentukan luas alas limas tersebut.

3. Diketahui limas segitiga siku-siku di R dengan volume 60 cm³ dan tinggi 6 cm. Jika panjang PR adalah 5 cm. Tentukan:
   a. luas alas limas $S.PQR$,
   b. panjang QR.

Jawab:

1. a. Luas alas $= PQ \times RQ$
   $= 15 \times 9$
   $= 135$
   Jadi, luas alas limas $T.PQRS$ adalah 135 cm².

   b. Volume limas $= \frac{1}{3} \times$ luas alas $\times$ tinggi
   $= \frac{1}{3} \times 135 \times 12$
   $= 540$

   Jadi, volume limas $T.PQRS$ adalah 540 cm³.

2. Volume limas $= \frac{1}{3} \times$ luas alas $\times$ tinggi
   $126 = \frac{1}{3} \times$ luas alas $\times 14$
   $3 \times 126 =$ luas alas $\times 14$
   $378 =$ luas alas $\times 14$
   luas alas $= \frac{378}{14}$
   $= 27$

   Jadi, luas alas limas tersebut adalah 27 cm².

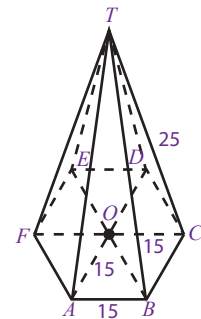
3. a. Volume limas $= \frac{1}{3} \times$ luas alas $\times$ tinggi
   $60 = \frac{1}{3} \times$ luas alas $\times$ 6 cm
   $3 \times 60 =$ luas alas $\times 6$
   luas alas $= \frac{180}{6}$
   $= 30$

   Jadi, luas alas limas $SPQR$ adalah 30 cm².

   b. luas segitiga $PQR = \frac{1}{2} \times PR \times RQ$
   $30 = \frac{1}{2} \times 5 \times RQ$
   $60 = 5 \times RQ$
   $RQ = \frac{60}{5} = 12$

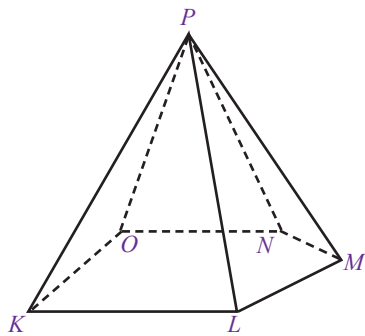
   Jadi, panjang RQ adalah 12 cm

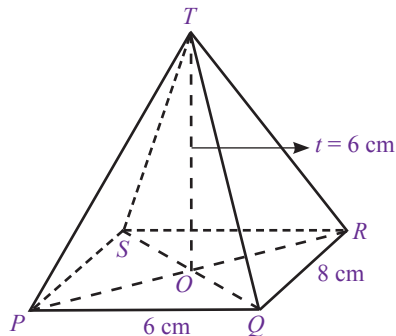
Problematika

Perhatikan gambar berikut.

Hitunglah:
a. luas Δ AOB,
b. volume bangun tersebut,
c. luas permukaan bangun tersebut.

Uji Kompetensi 8.4

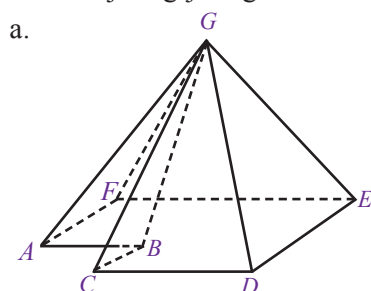
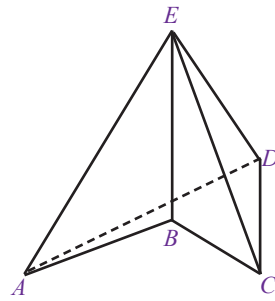
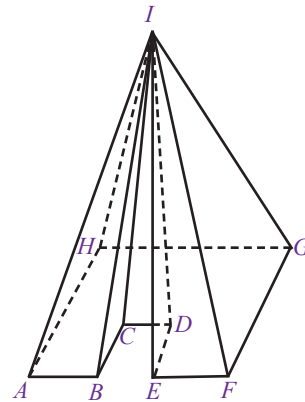
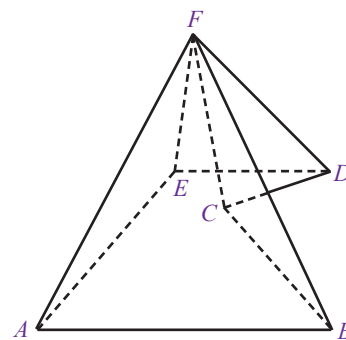
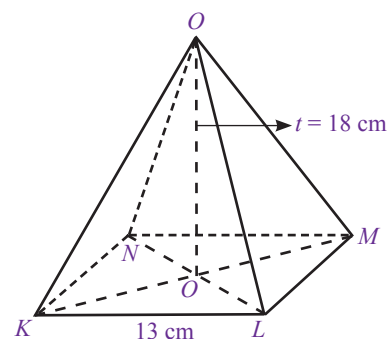
Kerjakanlah soal-soal berikut.

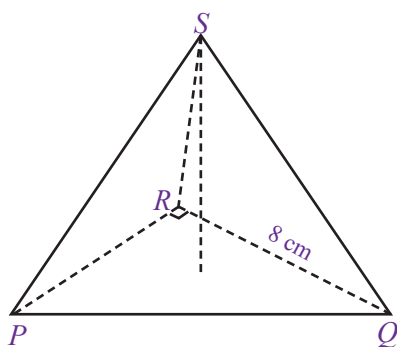
1. Perhatikan gambar bangun ruang berikut.

Dari gambar tersebut, tentukan:
a. nama bangun ruang tersebut,
b. sisi bangun ruang tersebut,
c. rusuk bangun ruang tersebut,
d. titik sudut bangun ruang tersebut.

2.

Dari gambar limas segiempat *T.PQRS*, tentukan:
a. panjang *PR,*
b. panjang *QO,*
c. panjang *TR.*

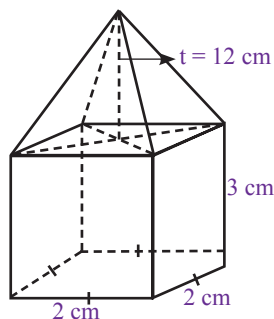
3. Buatlah limas yang memiliki alas sebagai berikut.
a. Segitujuh
b. Segidelapan
c. Trapesium
d. Segitiga samakaki
e. Segitiga samasisi

4. Buatlah jaring-jaring limas-limas berikut ini.

a.

b.

c.

d.

5. Perhatikan gambar limas *E.ABCD* berikut.

Alas limas *E.ABCD* merupakan persegi yang memiliki panjang sisi 13 cm. Jika sisi tegak limas merupakan segitiga samakaki dengan tinggi 18 cm, tentukan:
a. luas alas,
b. luas ΔLMO,
c. luas bidang tegak,
d. luas permukaan.

6.

Diketahui limas segitiga siku-siku *S.PQR* seperti gambar di atas. Jika luas seluruh sisi tegaknya adalah 84 cm^2 dan luas permukaannya 108 cm^2, tentukan:
   a. luas alas limas tersebut,
   b. panjang *PR*.

7. Hitunglah luas permukaan sebuah limas segitiga yang semua panjang rusuknya 6 cm.

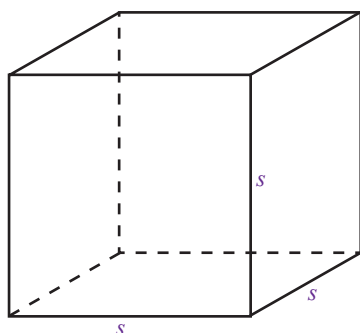
8. Perhatikan gambar rangka bangun berikut.

Rangka bangun tersebut terdiri atas dua bagian, yaitu balok dan limas. Tentukan:
   a. luas permukaan balok,
   b. volume balok,
   c. luas alas limas,
   d. panjang diagonal alas limas,
   e. volume limas.

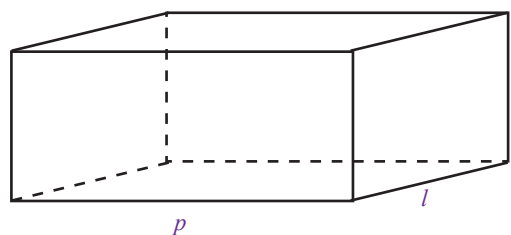
9. Diketahui sebuah limas memiliki alas persegi dengan ukuran sisi 90 cm. Jika volume limas tersebut 216.000 cm^3, tentukan:
   a. luas alas limas tersebut,
   b. tinggi limas tersebut.

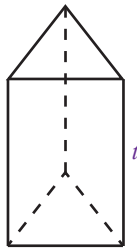
10. Lengkapi tabel berikut.

Luas Alas	Tinggi	Volume Limas
90 cm^2	...	330 cm^3
252 cm^2	12 cm	...
...	13 cm	312 cm^3
180 cm^2	...	900 cm^3
163 cm^2	36 cm	...

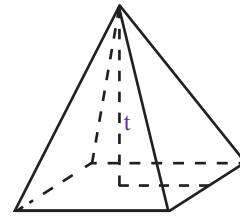
Rangkuman

- Yang termasuk bangun ruang sisi datar adalah kubus, balok, prisma, dan balok.
- Pada sebuah kubus, berlaku rumus-rumus sebagai berikut.

Luas permukaan = $6s^2$
Volume = s^3

- Pada sebuah balok, berlaku rumus-rumus sebagai berikut.

Luas permukaan = $2(pl + lt + pt)$
Volume = $p \times l \times t$

- Pada sebuah prisma, misalnya prisma segitiga, berlaku rumus-rumus sebagai berikut.

Luas permukaan = Jumlah luas sisi-sisi yang membentuk prisma

Volume = luas alas × tinggi

- Pada sebuah limas, misalnya limas segiempat, berlaku rumus-rumus sebagi berikut.

Luas permukaan = Jumlah luas sisi-sisi yang membentuk limas

Volume = $\frac{1}{3}$ × luas alas × tinggi

Refleksi

- Pada bab Bangun Ruang Sisi Datar ini, materi apa sajakah yang belum kamu pahami dan sudah kamu pahami dengan baik?
- Pada bab ini, menurutmu bagian mana yang paling menarik untuk kamu pelajari? Mengapa?

Peta Konsep

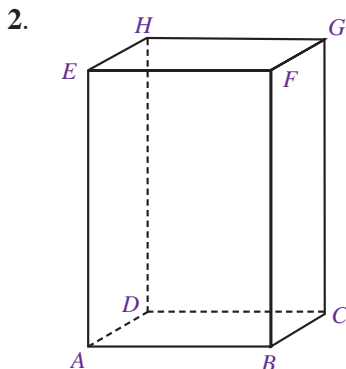
Bangun Ruang Sisi Datar
- Prisma
  - Segiempat
    - Kubus — rumus
      - Luas Permukaan = 6 s^2
      - Volume = s^3
    - Balok — rumus
      - Luas Permukaan = 2 ($pl + lt + pt$)
      - Volume = $p \times l \times t$
  - Segi-n — contoh
    - Prisma Segitiga
    - Prisma Segiempat
    - Prisma Segilima
    - rumus
      - Luas Permukaan = Jumlah Luas Sisi-Sisi yang Membentuk Prisma
      - Volume = Luas alas × Tinggi
- Limas — contohnya
  - Limas Segitiga
  - Limas Segiempat
  - Limas Segilima
  - Luas Permukaan = Jumlah Luas Sisi-Sisi yang Membentuk Limas
  - Volume = $\frac{1}{3}$ × Luas Alas × Tinggi

Uji Kompetensi Bab 8

A. Pilihlah satu jawaban yang benar.

1. Aku adalah sebuah bangun ruang yang memiliki 6 buah sisi dan 4 buah titik sudut. Selain itu, aku memiliki 12 rusuk yang berukuran sama panjang. Aku adalah ....

   a. kubus **c.** prisma segitiga
   b. balok **d.** limas segitiga

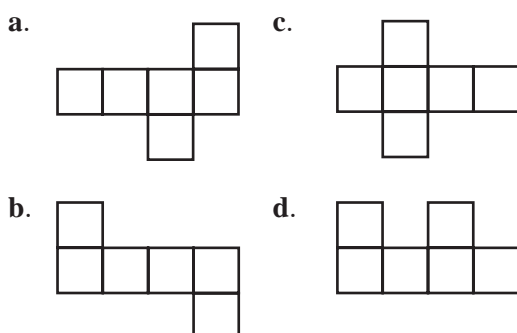
2.

   Dari gambar balok *ABCD.EFGH* di atas, diagonal ruang ditunjukkan oleh ....

   a. *HC*
   b. *ACGE*
   c. *DF*
   d. *BCEH*

3. Sebuah kubus *PQRS.TUVW* memiliki panjang rusuk 13 cm. Panjang diagonal bidang kubus tersebut adalah ....

   a. $\sqrt{13}$ cm
   b. $2\sqrt{13}$ cm
   c. $13\sqrt{2}$ cm
   d. $12\sqrt{3}$ cm

4. Berikut ini yang bukan merupakan jaring-jaring kubus adalah ....

   a.
   c.
   b.
   d.

5. Volume kubus yang luas permukaannya 1.014 cm^2 adalah ....

   a. 2.197 cm^3 **c.** 884 cm^2
   b. 2.526 cm^3 **d.** 1.697 cm^2

6. Sebuah akuarium berbentuk balok memiliki ukuran panjang, lebar, dan tinggi berturut-turut 60 cm, 36 cm, dan 45 cm. Jika akuarium tersebut diisi air sebanyak $\frac{3}{4}$ bagian maka volume air tersebut adalah ....

   a. 2.025 cm^3 **c.** 7.290 cm^3
   b. 5.625 cm^3 **d.** 72.900 cm^3

7. Sebuah ruangan berbentuk balok akan dicat dindingnya. Jika ukuran panjang, lebar, dan tinggi ruangan tersebut adalah 5 m, 4 m, dan 3 m maka luas dinding yang dicat adalah ....

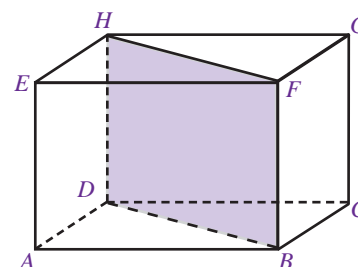
   a. 24 m^2 **c.** 54 m^2
   b. 30 m^2 **d.** 94 m^2

8. Sebuah kerangka balok memiliki ukuran panjang 10 cm, lebar 8 cm, dan tinggi 9 cm. Jika kerangka balok tersebut terbuat dari seutas kawat, banyaknya kawat yang dibutuhkan untuk membuat kerangka tersebut adalah ....

   a. 108 cm **c.** 24 cm
   b. 72 cm **d.** 27 cm

9. Luas permukaan balok yang memiliki ukuran panjang 8 cm dan lebar 11 cm adalah 968 cm^2. Tinggi balok tersebut adalah ....

   a. 9 cm **c.** 11 cm
   b. 10 cm **d.** 12 cm

10. Perhatikan gambar berikut.

    Balok *ABCD.EFGH* memiliki panjang diagonal bidang 18 cm. Jika tinggi balok tersebut 14 cm maka luas bidang diagonal *BHD* adalah ....

    a. 525 cm^2 **c.** 225 cm^2
    b. 252 cm^2 **d.** 255 cm^2

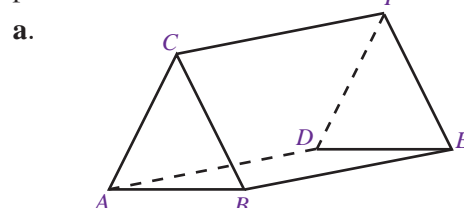
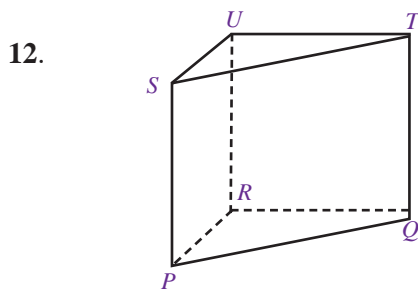
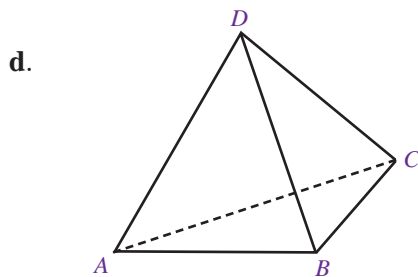
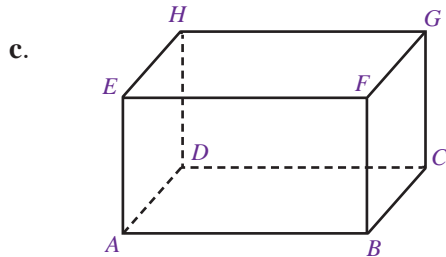
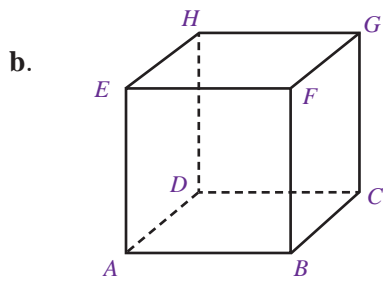
11. Gambar berikut menunjukkan bangun ruang prisma, kecuali ....

    a.

b.

c.

d.

12.

Pada gambar prisma di atas, bagian yang sama bentuk dan ukurannya adalah ....

a. *PR* dan *TQ*
b. *PRUS* dan *RQTU*
c. *PQTS* dan *RQTU*
d. *PRQ* dan *SUT*

13. Luas permukaan suatu prisma adalah 576 cm². Jika luas sisi tegaknya adalah 332 cm² maka luas alas prisma tersebut adalah ....

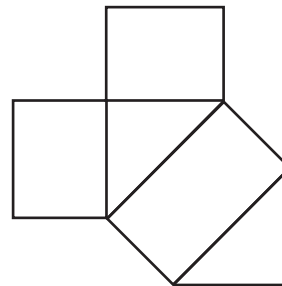
a. 448 cm²
b. 244 cm²
c. 122 cm²
d. 61 cm²

14. Banyaknya rusuk pada prisma segienam adalah ....

a. 6
b. 8
c. 24
d. 48

15. Sebuah prisma memiliki luas alas 84 cm². Jika tinggi prisma tersebut adalah 17 cm, volumenya adalah ....

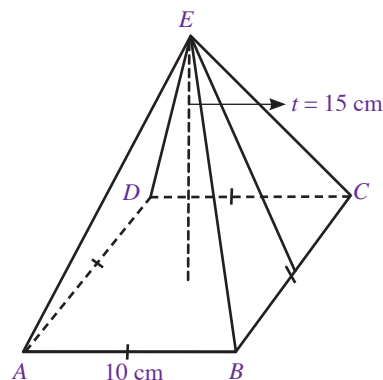
a. 2.628 cm³
b. 1.428 cm³
c. 878 cm³
d. 848 cm³

16. Perhatikan gambar berikut.

Gambar tersebut merupakan jaring-jaring bangun ruang ....

a. limas segiempat
b. limas segitiga siku-siku
c. prisma segitiga sama sisi
d. prisma segitiga siku-siku

17. Berikut ini merupakan ciri khusus dari limas, yaitu ....

a. memiliki titik puncak
b. memiliki dua sisi yang sama bentuk dan ukurannya
c. memiliki panjang rusuk yang sama
d. memiliki sisi berhadapan yang sama panjang

18. Perhatikan gambar limas *E.ABCD* berikut.

Luas permukaan limas tersebut adalah ....

a. 100 cm²
b. 200 cm²
c. 300 cm²
d. 400 cm²

19. Alas sebuah limas adalah sebuah segitiga dengan panjang alas 10 cm dan tinggi 18 cm. Jika tinggi limas tersebut adalah 18 cm maka volume limas adalah ....

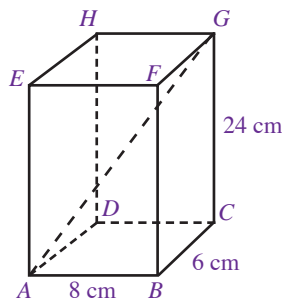
a. 420 cm^3 **c**. 1.246 cm^3
b. 840 cm^3 **d**. 1.200 cm^3

20. Sebuah limas memiliki alas berbentuk persegi. Jika volume limas dan tinggi limas berturut-turut adalah 567 cm^3 dan 21 cm maka diagonal bidang alas limas tersebut adalah....

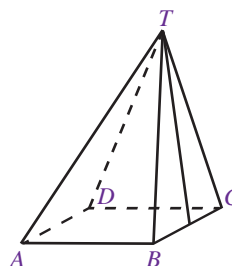
a. 9 cm **c**. $2\sqrt{9}$
b. $9\sqrt{2}$ **d**. 2 cm

B. Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Sebuah kubus dengan rusuk *s* diperkecil sedemikian sehingga menjadi kubus dengan rusuk $\frac{1}{3}s$. Jika panjang diagonal ruang kubus setelah diperkecil adalah $6\sqrt{3}$ cm, tentukan panjang rusuk kubus mula-mula.

2. Perhatikan gambar berikut.

Dari gambar tersebut, tentukan:
a. luas permukaan balok,
b. panjang diagonal ruang *AG*,
c. volume balok.

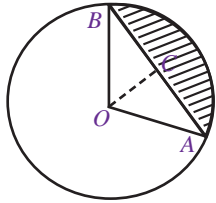
3. Sebuah prisma tegak segitiga mempunyai alas berbentuk segitiga samasisi yang panjang sisinya 10 cm. Jika tinggi prisma tersebut 15 cm, tentukan:
a. luas permukaan prisma,
b. volume prisma.

4.

Diketahui alas limas *T.ABCD* pada gambar di atas berbentuk persegi. Jika volumenya 400 cm^3 dan tingginya 12 cm, tentukan:
a. luas alas limas,
b. panjang rusuk alas limas,
c. panjang *TP*,
d. luas segitiga *TBC*,
e. luas permukaan limas,

5. Dari suatu kubus *ABCD. EFGH* dibuat limas *G. ABCD*.
a. Hitunglah perbandingan volume limas dengan volume kubus di luar limas.
b. Jika panjang rusuk kubus tersebut 15 cm, tentukan volume kubus di luar limas *G.ABCD*.

Uji Kompetensi Semester 2

A. Pilihlah satu jawaban yang benar.

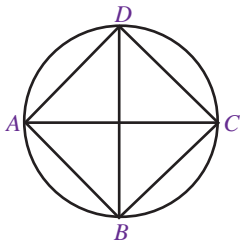
1. Perhatikan gambar berikut. Daerah yang diarsir disebut ....

   a. juring
   b. busur
   c. tembereng
   d. tali busur

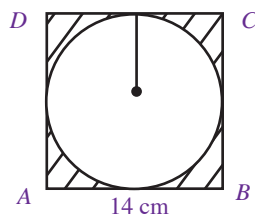
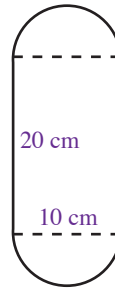
2. Perhatikan kembali lingkaran pada soal nomor 1. Garis *OC* disebut sebagai ....
   a. tali busur c. apotema
   b. busur d. diameter

3. Luas sebuah lingkaran yang memiliki keliling 44 cm adalah ....
   a. 145 cm² c. 88 cm²
   b. 154 cm² d. 66 cm²

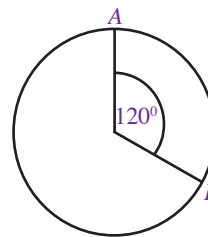
4. Sebuah lingkaran memiliki luas 616 cm² maka diameter lingkaran tersebut adalah ....
   a. 7 cm c. 21 cm
   b. 14 cm d. 28 cm

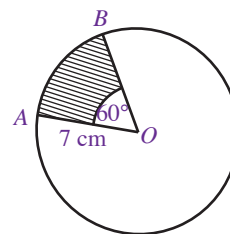
5. Sebuah taman memiliki bentuk lingkaran dengan diameter 70 meter. Jika di sekeliling taman tersebut ditanami pohon dengan jarak antar pohon adalah 10 meter maka banyaknya pohon adalah ....
   a. 385 c. 154
   b. 245 d. 616

6. Perhatikan gambar berikut

   Sebuah persegi dengan panjang sisi 7 cm dilapisi oleh lingkaran seperti pada gambar. Keliling lingkaran tersebut adalah ....
   a. $7\sqrt{2}$ cm c. $22\sqrt{2}$ cm
   b. $21\sqrt{2}$ cm d. $28\sqrt{2}$ cm

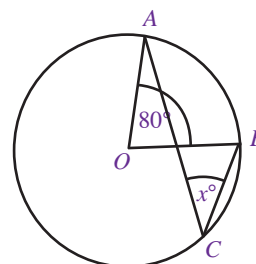
7. Perhatikan gambar berikut Luas daerah yang diarsir adalah ....

   a. 196 cm²
   b. 154 cm²
   c. 52 cm²
   d. 42 cm²

8. Sebuah lintasan lari berbentuk seperti gambar di samping. Keliling lintasan tersebut adalah ....

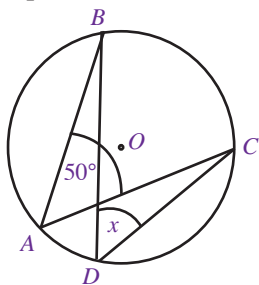
   a. 21,4 m c. 41,4 m
   b. 31,4 m d. 51,4 m

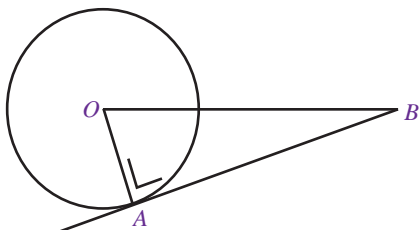
9. Perhatikan gambar berikut. Jika jari-jari lingkaran tersebut adalah 7 cm maka panjang busur *AB* adalah ....

   a. 22 cm
   c. 16 cm
   b. $20\frac{2}{3}$ cm
   d. $14\frac{2}{3}$ cm

10. Sebuah lingkaran memiliki ukuran seperti pada gambar di samping. Luas juring *AOB* adalah ....

   a. $25\frac{2}{3}$ cm²
   c. 154 cm²
   b. $26\frac{2}{3}$ cm²
   d. 44 cm²

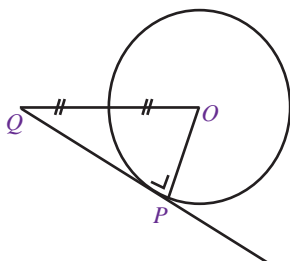
11. Luas suatu lingkaran adalah 108 cm². Jika luas juring *AOB* pada lingkaran tersebut adalah 12 cm² maka besarnya sudut *AOB* adalah ....
   a. 90°
   b. 60°
   c. 40°
   d. 30°

12. Perhatikan gambar berikut. Besarnya sudut *x* yang tepat adalah ....

   a. 80°
   b. 40°
   c. 30°
   d. 10°

13. Perhatikan gambar berikut. Besarnya sudut x yang tepat adalah ....

a. 100°
b. 50°
c. 25°
d. 10°

14. Perhatikan gambar berikut dengan saksama.

Jika panjang OA = 5 cm dan jarak OB = 13 cm maka panjang garis singgung AB adalah ....

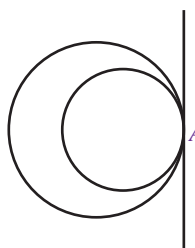
a. 10 cm
c. 13 cm
b. 12 cm
d. 14 cm

15. Perhatikan gambar berikut dengan saksama.

Jika panjang garis PQ adalah $(4\sqrt{3})$ cm maka panjang jari-jari lingkaran tersebut adalah ....

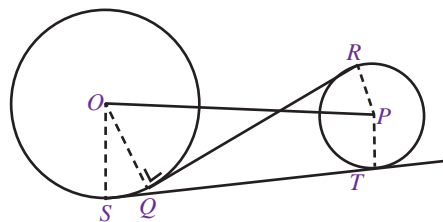
a. 8 cm
c. 4 cm
b. 6 cm
d. 2 cm

16. Perhatikan kembali gambar pada soal nomor 15. Luas segitiga OPQ adalah ....

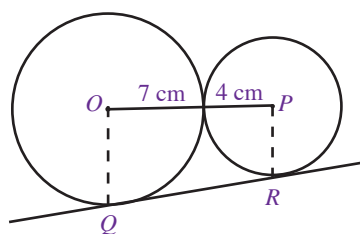
a. $16\sqrt{3}$
b. $12\sqrt{3}$
c. $8\sqrt{3}$
d. $4\sqrt{3}$

17. Perhatikan gambar berikut.

Dari gambar tersebut, terlihat posisi dua lingkaran yang saling ....

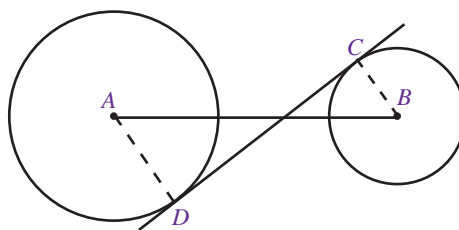
a. lepas
b. berpotongan
c. bersinggungan di luar
d. bersinggungan di dalam

18. Perhatikan gambar berikut.

Yang dimaksud garis singgung persekutuan luar adalah ....

a. OP
c. ST
b. QP
d. OQ

19. Perhatikan gambar berikut.

Jika panjang jari-jari lingkaran O adalah 7 cm dan jari-jari lingkaran P adalah 4 cm maka panjang QR adalah ....

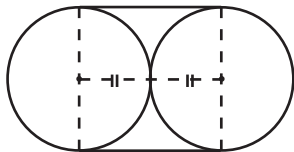
a. $\sqrt{212}$ cm
b. $\sqrt{112}$ cm
c. $\sqrt{121}$ cm
d. $\sqrt{211}$ cm

20. Perhatikan gambar berikut.

Diketahui jari-jari lingkaran A adalah 10 cm dan jari-jari lingkaran B adalah 8 cm. Jika jarak AB 25 cm maka panjang garis singgung persekutuan dalam kedua lingkaran tersebut adalah ....

a. $\sqrt{244}$ cm
b. $\sqrt{285}$ cm
c. $\sqrt{294}$ cm
d. $\sqrt{301}$ cm

21. Diketahui dua buah lingkaran masing-masing berjari-jari 6 cm dan 4 cm. Jika panjang garis singgung persekutuan dalam kedua lingkaran tersebut 12 cm maka jarak titik pusat kedua lingkaran tersebut adalah ....

a. $\sqrt{43}$ cm **c.** $\sqrt{45}$ cm
b. $\sqrt{44}$ cm **d.** $\sqrt{46}$ cm

22. Perhatikan gambar berikut.

Dua buah lingkaran diikat oleh sebuah tali seperti tampak pada gambar. Jika panjang tali 58 cm maka jari-jari salah satu lingkaran adalah ....

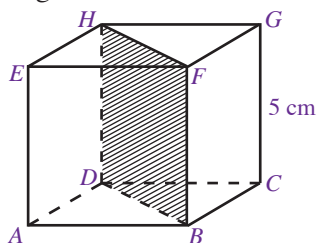
a. 4 cm **c.** 6 cm
b. 5 cm **d.** 7 cm

23. Aku adalah bangun ruang yang memiliki 5 sisi, 8 rusuk, dan 5 titik sudut. Aku adalah ....

a. prisma segiempat
b. prisma segitiga
c. limas segitiga
d. limas segiempat

24. Sebuah kubus memiliki diagonal bidang $8\sqrt{2}$ cm. Volume kubus tersebut adalah ...

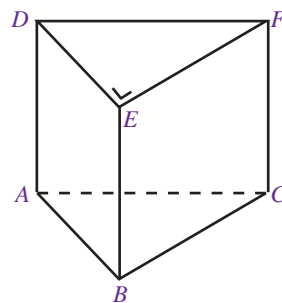
a. 480 cm^3 **c.** 512 cm^3
b. 363 cm^3 **d.** 64 cm^3

25. Perhatikan gambar berikut.

Dari gambar kubus *ABCD.EFGH* tersebut, luas bidang diagonal *DBFH* adalah ....

a. 125 cm^2 **c.** 25 cm^2
b. $25\sqrt{2}$ cm^2 **d.** $\sqrt{125}$ cm^2

26. Sebuah balok memiliki ukuran panjang 15 cm, lebar 11 cm, dan tinggi 9 cm. Luas permukaan balok tersebut adalah ....

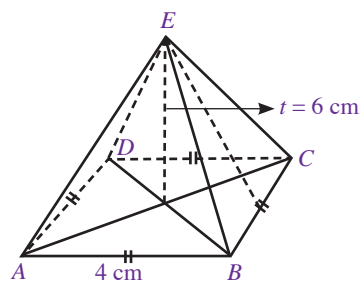
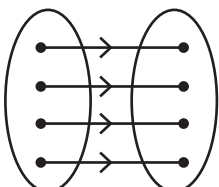
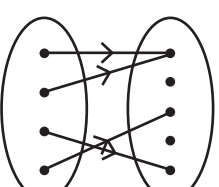
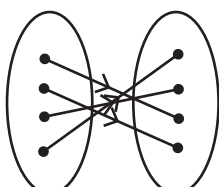
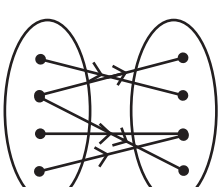
a. 798 cm^2 **c.** 796 cm^2
b. 797 cm^2 **d.** 795 cm^2

27. Perhatikan gambar berikut.

Bagian prisma yang memiliki ukuran yang sama adalah ....

a. *DE* dengan *BC*
b. *AB* dengan *AC*
c. *AD* dengan *CF*
d. *EB* dengan *EF*

28. Volume sebuah prisma segitiga adalah 480 cm^3. Jika alas prisma tersebut berupa segitiga dengan panjang alas 8 cm dan tinggi 6 cm tinggi prisma tersebut adalah ....

a. 8 cm
b. 10 cm
c. 12 cm
d. 14 cm

29. Perhatikan gambar berikut.

a. 64 cm^2
b. 48 cm^2
c. 36 cm^2
d. 24 cm^2

30. Perhatikan kembali gambar limas pada soal nomor 29. Volume limas *E.ABCD* adalah ....

a. $\frac{18}{3}\sqrt{32}$
b. $\frac{16}{3}\sqrt{32}$
c. $\frac{18}{3}\sqrt{34}$
d. $\frac{16}{3}\sqrt{34}$

Uji Kompetensi Akhir Tahun

A. Pilihlah satu jawaban yang benar.

1. Faktor dari $2x^2 + 11x + 12$ adalah ....
   a. $(x + 3)(2x + 4)$
   b. $(2x + 3)(x + 4)$
   c. $(x – 3)(2x + 4)$
   d. $(x + 3)(2x – 4)$

2. Diketahui bentuk aljabar sebagai berikut.
   $x^2 + y^2 – xy + 2x – y = 0$
   Jika $x = 1$ dan $y = 2$ maka nilai dari bentuk aljabar tersebut adalah ....
   a. 1 c. 3
   b. 2 d. 4

3. Hasil dari $(x – 3)(x + 2)(x – 1)$ adalah ....
   a. $x^3 – 2x^2 – 5x + 6$
   b. $x^3 + 2x^2 – 5x + 6$
   c. $x^3 + 2x + 5x – 6$
   d. $x^3 + 2x – 5x + 6$

4. Bentuk sederhana dari
   $3x – 2(5 + x) + 8(2x + 1)$ adalah ....
   a. $2x + 17$ c. $17x + 2$
   b. $2x – 17$ d. $17x – 2$

5. Berikut ini yang bukan merupakan fungsi adalah ....
   a.

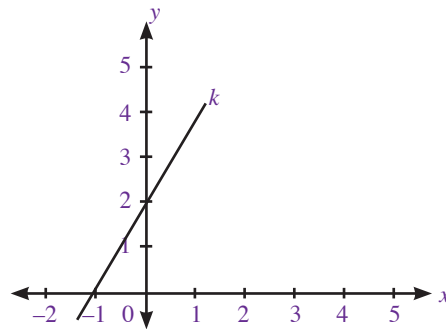
   c.

   b.

   d.

6. Diketahui suatu fungsi F didefinisikan oleh $f(x) = 12x – 8$. Nilai $f(–3)$ adalah ....
   a. –44 c. 28
   b. 44 d. –28

7. Suatu fungsi f didenifisikan oleh $f(x) = 7x + 5$. Jika nilai $f(m) = 82$ maka nilai m adalah ....
   a. 8 c. 10
   b. 9 d. 11

8. Perhatikan gambar berikut.

   Dari gambar tersebut, gradien garis k adalah ....
   a. $\frac{1}{2}$ c. 2
   b. $-\frac{1}{2}$ d. –2

9. Perhatikan kembali gambar pada soal nomor 8. Garis k mempunyai persamaan ....
   a. $2x – y + 2 = 0$
   b. $2x + y – 2 = 0$
   c. $2x + y + 2 = 0$
   d. $2x – y – 2 = 0$

10. Garis yang sejajar dengan garis $4x + 2y – 1 = 0$ memiliki persamaan ....
    a. $x + 3y – 5 = 0$
    b. $2x + y + 6 = 0$
    c. $8x + 4y – 12 = 0$
    d. $6x – 3y + 2 = 0$

11. Persamaan garis yang melalui titik (2,– 3) dan (–1, 4) adalah ....
    a. $7x – 3y + 5 = 0$
    b. $7x + 3y + 5 = 0$
    c. $7x – 3y – 5 = 0$
    d. $7x + 3y – 5 = 0$

12. Garis p dan garis q adalah garis yang saling tegak lurus. Jika gradien garis q adalah $\frac{1}{3}$ maka gradien garis p adalah ...
    a. 3 c. $-\frac{1}{3}$
    b. –3 d. –1

13. Nilai x yang memenuhi persamaan $7x – 11 = 10$ adalah ....
    a. 0 c. 2
    b. 1 d. 3

14. Diketahui sebuah persamaan linear dua variabel sebagai berikut.

$3x + 2y = 12$

Jika x, y Œbilangan cacah maka himpunan penyelesaian yang mungkin adalah ....

a. {(0, 6), (1, 4), (2, 3), (3, 2),(4, 0)}
b. {(0, 6), (2, 3), (3, 2), (4, 0)}
c. {(0, 6), (2, 3), (4, 0)}
d. {(0, 6), (2, 3)}

15. Diketahui SPLDV sebagai berikut.

$5x - 4y = 5$

$x + 3y = 1$

Nilai y yang memenuhi SPLDV tersebut adalah ....

a. 0 c. –1
b. 1 d. 2

16. Diketahui sebuah SPLDV :

$2x - 4y = -16$

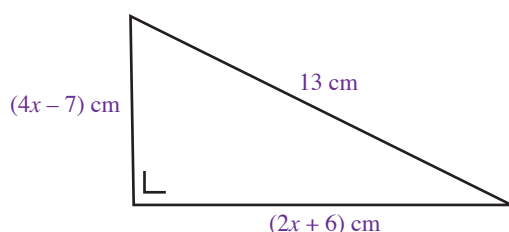
$x + 2y = 4$

Himpunan penyelesaian dari SPLDV tersebut adalah ....

a. {(2, –3)} c. {(–3, 2)}
b. {(–2, 3)} d. {(3, –2)}

17. Selisih uang Sani dan Ari adalah Rp 10.000,00. Jika dua kali uang Sani ditambah dengan empat kali uang Ari adalah Rp160.000,00 maka besarnya uang Sani adalah ....

a. Rp25.000,00
b. Rp20.000,00
c. Rp15.000,00
d. Rp10.000,00

18. Perhatikan gambar berikut.

Nilai x yang memenuhi adalah ....

a. 1 c. 3
b. 2 d. 4

19. Sebuah kapal berlayar ke arah timur sejauh 7 km, kemudian berbelok ke arah selatan sejauh 3 km. Jarak antara titik keberangkatan kapal tersebut sampai terakhir adalah ...

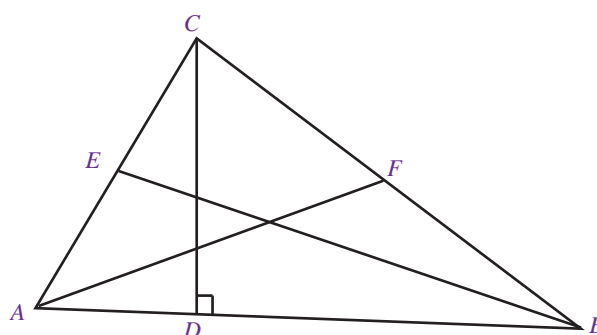
a. $\sqrt{7+3}$ c. $\sqrt{7-3}$
b. $\sqrt{7^2+3^2}$ d. $\sqrt{7^2-3^2}$

20. Keliling sebuah persegipanjang adalah 26 cm. Jika lebar persegipanjang tersebut adalah 5 cm maka panjang diagonal persegipanjang adalah ....

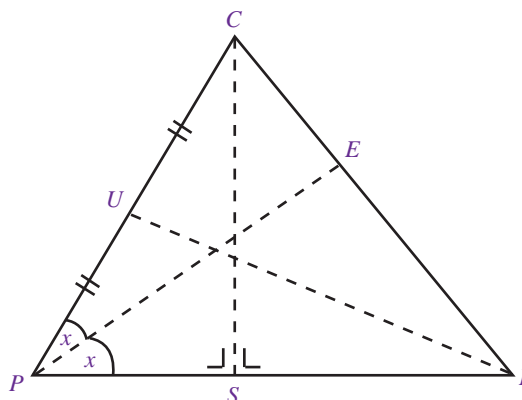
a. $5\sqrt{2}$ c. $\sqrt{98}$
b. $8\sqrt{2}$ d. $\sqrt{89}$

21. Panjang sisi miring segitiga siku-siku yang memiliki luas 30 cm^2 dan tinggi 6 cm adalah ....

a. $\sqrt{163}$ cm c. $8\sqrt{2}$ cm
b. $\sqrt{136}$ cm d. $6\sqrt{2}$ cm

22. Perhatikan gambar berikut.

Dari gambar segitiga ABC tersebut, yang merupakan garis tinggi segitiga adalah ....

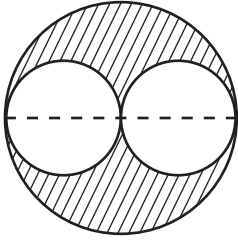
a. AF c. CD
b. BE d. AC

23. Perhatikan gambar berikut.

Diketahui panjang PQ = 18 cm, QR = 15 cm, dan PR = 10 cm panjang garis berat UQ adalah ...

a. $\sqrt{\frac{449}{2}}$ cm c. $4\sqrt{9}$ cm
b. $2\sqrt{449}$ cm d. $9\sqrt{4}$ cm

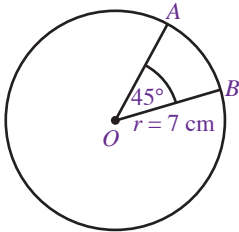
24. Luas sebuah lingkaran adalah 154 cm^2. Keliling lingkaran tersebut adalah ....

a. 22 cm c. 88 cm
b. 44 cm d. 132 cm

25. Perhatikan gambar berikut.

Jika jari-jari lingkaran yang kecil adalah 7 cm maka luas daerah yang diarsir adalah ....

a. 616 cm^2 **c**. 154 cm^2

b. 308 cm^2 **d**. 88 cm^2

26. Perhatikan gambar berikut.

Dari gambar tersebut, panjang busur *AB* adalah ....

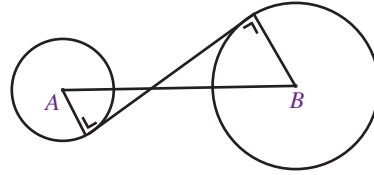
a. $4\frac{1}{2}$ cm **c**. $19\frac{1}{2}$ cm

b. $5\frac{1}{2}$ cm **d**. $20\frac{1}{2}$ cm

27. Perhatikan kembali gambar pada soal nomor 26. Luas juring *AOB* adalah ....

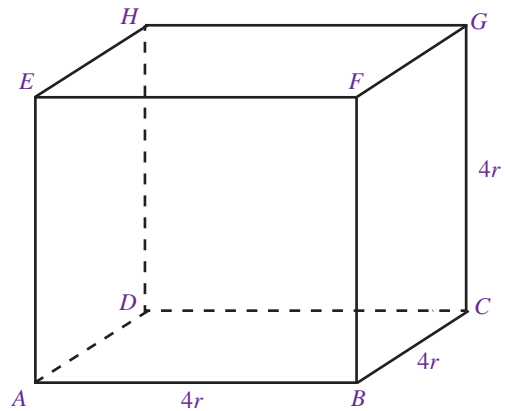
a. $17\frac{1}{4}$ cm^2 **c**. $19\frac{1}{4}$ cm^2

b. $18\frac{1}{4}$ cm^2 **d**. $20\frac{1}{4}$ cm^2

28. Perhatikan gambar berikut.

Jari-jari lingkaran *A* dan lingkaran *B* adalah 3 cm dan 7 cm. Jika panjang garis singgung adalah 15 cm maka jarak *AB* adalah ....

a. $4\sqrt{5}$ cm **c**. $6\sqrt{5}$ cm

b. $5\sqrt{5}$ cm **d**. $7\sqrt{5}$ cm

29. Perhatikan gambar berikut.

Jika luas permukaan kubus *ABCD.EFGH* adalah 120 cm^2 maka nilai *r* yang memenuhi adalah ....

a. 2 **c**. 4

b. 3 **d**. 5

30. Sebuah limas memiliki volume 150 cm^2. Jika luas alas limas tersebut adalah 45 cm^2 maka tingginya adalah ....

a. 10 cm **c**. 15 cm

b. 20 cm **d**. 25 cm

Kunci Jawaban

Bab 1 Faktorisasi Aljabar

Uji Kompetensi 1.1 halaman 8

1. **a.** koefisien : 3
   variabel : x dan y
   konstanta : -
   b. koefisien : 5
   variabel : p^2 dan p
   konstanta : -
   c. koefisien : 20, 45, dan 7
   variabel : a, b, dan c
   konstanta : -
   d. koefisien : 9 dan 3
   variabel : x dan y
   konstanta : -
   e. koefisien : 13
   variabel : m
   konstanta : –18
3. **a.** $3x + 8$
   b. $3x + y + 2z$
   c. $3a - 3b + 2$
5. **a.** $4xy - 10x$
   b. $xy - 16x$
   c. $13xy - 28x$
7. $L = \frac{10x^2 - 4x - 6}{2}$
9. **a.** $8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$
   b. $x^2 - 16x + 64$
   c. $4x^2 - 8xy + 4y$

Uji Kompetensi 1.2 halaman 11

1. **a.** $4\,(a+3)$
   b. $5p\,(2p + 53)$
   c. $y(13x^2 - \frac{1}{13}y)$
   d. $\frac{1}{9}p(pq^2 + \frac{1}{3})$
   e. $22\,xy\,(z^2 + 4)$
   f. $7\,pq\,(2 - 3qr)$
   g. $xyz\,(3xz + 6y + 2)$
   h. $ab^2\,(9a^2 b + 27a^2 - 4b)$
3. **a.** $(x + 1)(x + 1)$
   b. $(x - 3)(x + y)$
   c. $(x + 6)(x + 5)$
   d. $(x - 5)(x - 2)$
   e. $(x - 8)(x + 7)$
   f. $(x - 5)(x - 3)$
   g. $(x + 7)(x - 4)$
   h. $(x + 3)(x + 9)$

Uji Kompetensi 1.3 halaman 17

1. **a.** $\frac{2(2a^2 + b^2)}{4b}$
   b. $\frac{6}{sa}$
   c. $\frac{x^2 + y^2}{xy}$
   d. $\frac{2xn + 3ym}{mm}$
   e. $\frac{1}{x - x^2}$
   f. $\frac{7\text{m} + 9}{2\text{n}}$
   g. $\frac{2r^2 + 17r + 22}{r^2 + 3^r + 2}$
   h. $\frac{38x^2 - 36x - 12}{90x^2 - 17x - 3}$
3. **a.** $\frac{8}{3}$
   b. $\frac{12}{5x^3}$
   c. $\frac{14y^2}{9}$
   d. $\frac{5x + 5}{24x}$
   e. $\frac{55y - 88}{6x^2 y + 3xy}$
   f. $\frac{-70}{m}$
   g. $\frac{3a^3 - a^2b^2 - 3ab + b^3}{4ab}$
   h. $\frac{x^3 + 5x^2 + 4}{4x^2 + 20x}$
5. **a.** 9
   b. 11 y
   c. 13 x
   d. $\frac{a(a+1)}{a-1}$
   e. $\frac{5p+8}{3p^2}$
   f. $\frac{-12r^2}{(r^2 + 1)(r + 1)}$

g. $\dfrac{3x^2+4x+1}{3x^2-4x+}$

h. $\dfrac{3x^2-8x+1}{4x+1}$

Uji kompetensi Bab 1 halaman 19

Bagian A

1. c **11.** a
3. a **13.** d
5. b **15.** b
7. d **17.** c
9. b **19.** b

Bagian B

1. **a.** $-4x^2+6x$
b. $-3x+11$
c. $-3x+55$
d. $4x^2+55$
e. $196x^2-280x+100$

3. **a.** $(x+3)(x-1)$
b. $(x-18)(x-1)$
c. $(x+7)(-x+4)$
d. $(2x+3)(x+4)$
e. $(3x-5)(x-8)$

5. **a.** $\dfrac{6m}{n}$
b. $\dfrac{15p}{3+4^2}$
c. $3x+y$
d. $x-y$
e. $\dfrac{x+2}{x-1}$

Bab 2 Fungsi

Uji Kompetensi 2.1 halaman 25

1. $P \xrightarrow[\text{dari}]{\text{tiga kali}} Q$

P: 3, 6, 9, 12
Q: 0, 1, 2, 3, 4, 5
3 → 1
6 → 2
9 → 3
12 → 4

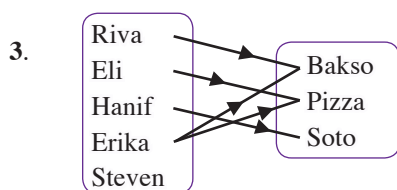
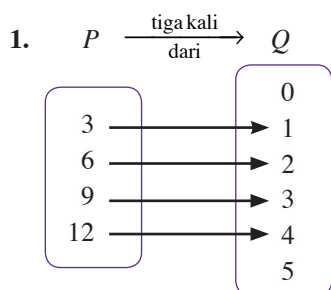
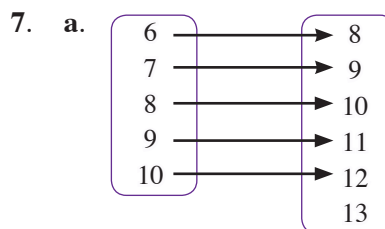
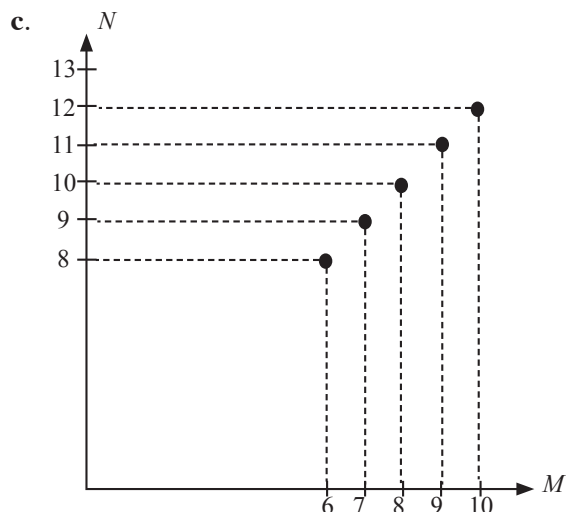
3.

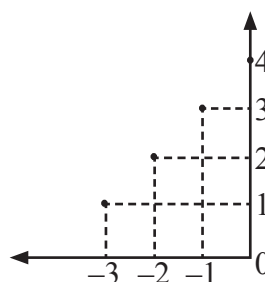
5. {(1, 3), (2, 6), (3,9), (4, 12)}

7. **a.**

6 → 8
7 → 9
8 → 10
9 → 11
10 → 12
13

b. {(6, 8), (7, 9), (8, 10), (9, 11), (10, 12)}

c.

Uji Kompetensi 2.2 halaman 29

1. Gambar (**a**) dan (**c**) karena setiap anggota A dipasangkan dengan tepat satu anggota B
3. **a.** Domain : {k,l,m}
Kodomain : {11, 12, 13, 14}
Range : {11, 12, 14}
b. Domain : {h, i, j}
Kodomain : {4, 8, 16, 32}
Range : {4,8}
c. Domain : {a, b, c, d, e}
Kodomain : {–2, –4, –6, –8, –10}
Range : {–2, –4, –6, –8, –10}
5. **a.** Domain : {-3, –2, –1,0}
Kodomain : {0, 1, 2, 3, ...}
Range : {1, 2, 3, 4}
b. {(–3,1), (–2,2), (–1,3), (0,4)}
c.

Uji Kompetensi 2.3 halaman 32

1. **a.** $f(3) = 11$

   b $f(-3) = -11$

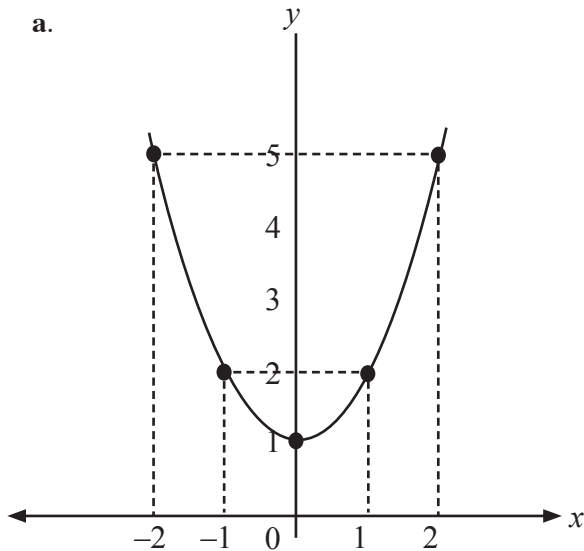
   c. $f(5) = 19$

   d. $f(1) = 3$

   e. $f(8) = 31$

3. $R_f = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

5. $a = 2$

7. **a.**

   b. $x = 4$ atau $x = -4$

9. **a.** $a = 7$, $b = -2$

   b. $f(x) = 7x - 2$

Uji kompetensi Bab 2 halaman 34

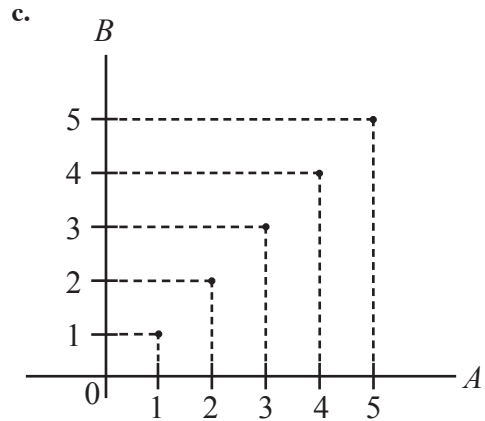
Bagian A

1.	b	**11.**	a
3.	b	**13.**	d
5.	d	**15.**	d
7.	c	**17.**	c
9.	b	**19.**	a

Bagian B

1. **a.**

   b. $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3) (4, 4), (5, 5)\}$

   c.

3. **a.** $h(x) = 2x^2 - 4$

   b. Domain = $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

   c. Range = $\{-4, -2, 4\}$

5. **a.** $a = 5$

   $b = -6$

   b. $f(x) = 5x - 6$

   c. $f(2) = -16$

Bab 3 Persamaan Garis Lurus

Uji Kompetensi 3.1 halaman 42

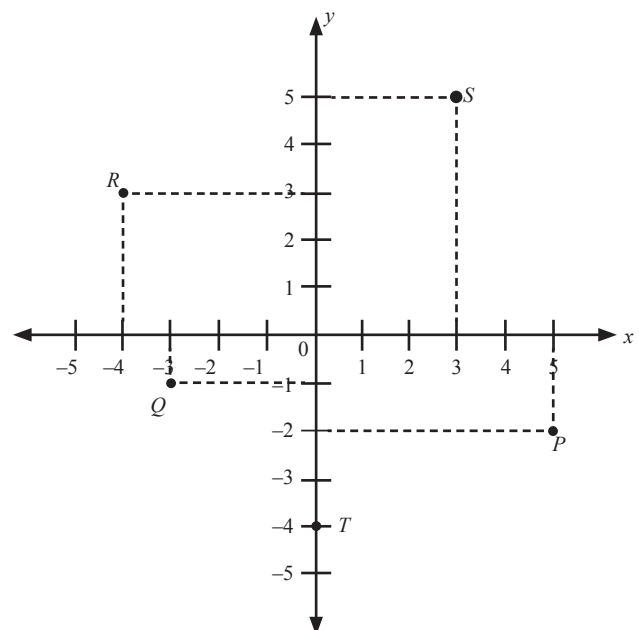
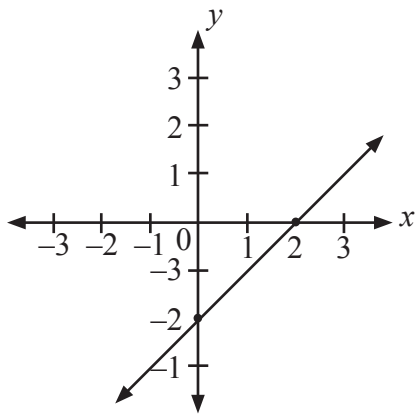
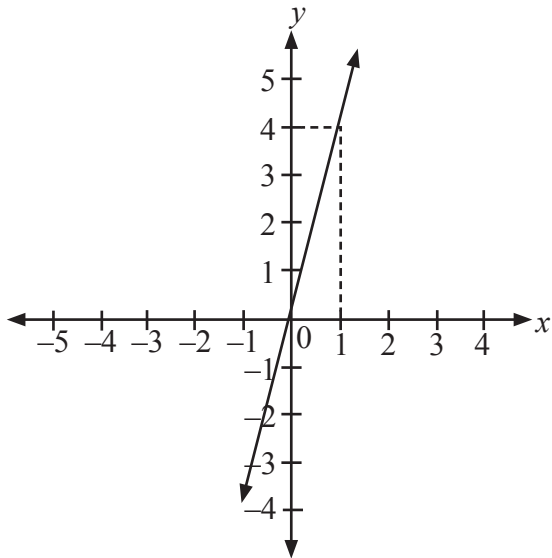
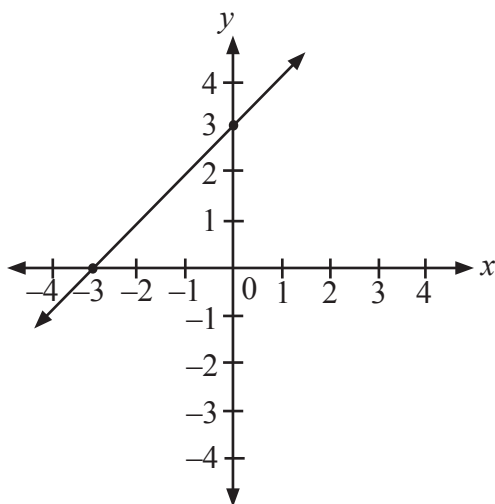
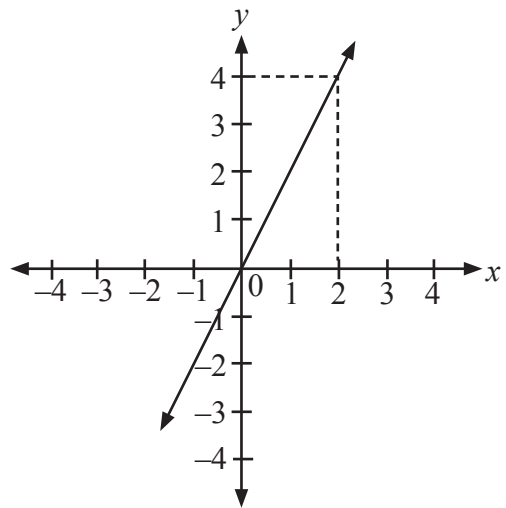
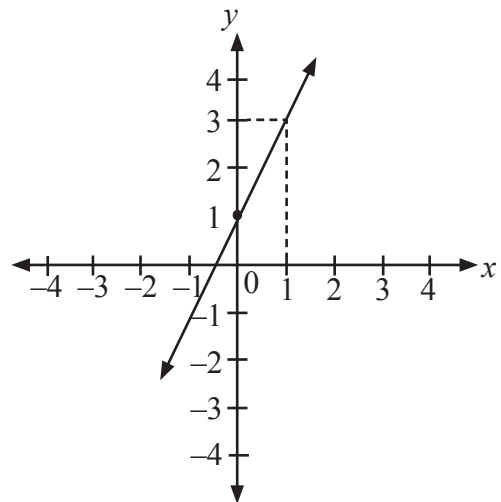
1. **a.** absis : 2, ordinat : 3

   b. absis : –2, ordinat : –3

   c. absis : 4, ordinat : –7

   d. absis : 0, ordinat : 8

   e. absis : –5, ordinat : 0

3.

5. **a**.

b.

c.

d.

e.

Uji Kompetensi 3.3 halaman 62

1. **a**. $y = -\frac{1}{2}x$

b. $y = -3x$

c. $y = 2x$

d. $y = -\frac{3}{4}$

e. $y = x$

3. a. $y = \frac{1}{3}x$

b. $y = -\frac{1}{2}x$

c. $y = -\frac{3}{2}$

d. $y = -\frac{3}{4}$

e. $3x + 5y + 1 = 0$

5. $y = -3x - 7$

7. a. $x - y + = 0$
b. $3x - 2y + 4 = 0$
c. $3x + 2y - 4 = 0$
d. $3x + 2y - 5 = 0$
e. $3x + 5y + 1 = 0$

9. b. 9 jam
c. 35 km

Uji Kompetensi Bab 3 halaman 65

Bagian A

1.	b	**11.**	a
3.	b	**13.**	d
5.	d	**15.**	d
7.	c	**17.**	c
9.	b	**19.**	a

Bagian B

1. a. $A(-3,-1)$
$B(0,0)$
$C(0,-2)$
$D(2,1)$
$E(1,3)$

b. $m_k = -2$

$m_l = \frac{1}{2}$

$m_m = \frac{3}{2}$

c. Persamaan garis k : $2x + y - 5 = 0$

Persamaan garis l : $\frac{1}{2}x - y = 0$

Persamaan garis m : $\frac{3}{2}x - y - 2 = 0$

3. a. $x + y + 3 = 0$
b. $x + y + 3 = 0$
c. $4x - 3y = 0$
d. $2x + y = 0$
e. $\frac{1}{3}x - y - \frac{4}{3} = 0$

5. a. Rp4.000,00
b. Rp3.500,00
c. Rp33.500,00

Bab 4 Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Uji Kompetensi 4.1 halaman 76

1. a. $a = 6$
b. $x = 2$
c. $p = 3$
d. $y = 5$
e. $z = 4$

3. a. $r = 4$
b. $k = 28$ cm
c. $L = 49$ cm^2

5. a. $a = 3$
b. $r = 2$
c. $p = -24$
d. $x = 0$
e. $x = 1$

7. a. $(0,0), (1,-\frac{4}{3}), (2,-\frac{8}{3})$

b. $(-5,0), (0,\frac{5}{3}), (1,2)$

c. $(4,0), (0,\frac{8}{3}), (1,2)$

d. $(12,0), (0,3), (4,2)$

e. $(-\frac{1}{4},0), (0,1), (1,5)$

9. a. $x + 2y = 20$
b. $2x + 3y = 10.000$
c. $(3l + l)x\ 2 = 20$ cm

Uji Kompetensi 4.2 halaman 83

1. a. $\{(\frac{18}{7} - \frac{16}{7})\}$

b. $\{(1,2)\}$
c. $\{(-1,-2)\}$

3. a. $\{(-3,-2)\}$
b. $\{(-4,-4)\}$
c. $\{(5,1)\}$

5. HP = $\{(-3,4)\}$

Uji Kompetensi 4.3 halaman 87

1. a. $x + y = 105.000$
$2x + y = 130.000$
b. Kaos = Rp25.000,00
Celana = Rp80.000,00
c. Rp260.000,00

3. a. $3x + 2y = 5.100$
$2x + 4y = 7.400$
b. Pensil = Rp700,00
Buku tulis = Rp1.500,00
c. Rp10.00,00

5. a. $x - y = 3.000$
$2x + 3y = 66.000$
b. Uang Budi = Rp15.000,00

Uang Ali = Rp12.000,00

c. Rp27.000,00

Uji Kompetensi Bab 4 halaman 89

Bagian A

1.	b	**11.**	a
3.	b	**13.**	d
5.	d	**15.**	d
7.	c	**17.**	c
9.	b	**19.**	a

Bagian B

1. a. Hp = {(1,0), (0,1)}
   b. Hp = {(0,4), (1,2), (2,0)}
   c. HP = {(3,0)}
   d. HP = {(1,2), (2,5)}
   e. HP = {(2,2)}
3. a. $2p + 2l = 76$
   $p - l = 10$
   b. $p = 24$ cm
   $l = 14$ cm
   c. $L = 336$ cm^2
5. a. $x + y = 60$
   $x - y = 4$
   b. umur ayah = 32 tahun
   umur ibu = 28 tahun
   c. Perbandingan = 8 : 7

Bab 5 Teorema Pythagoras dan Garis-Garis pada Segitiga

Uji Kompetensi 5.1 halaman 105

1. a. $\sqrt{48}$ cm d. 8 cm
   b. $\sqrt{52}$ cm e. $\sqrt{104}$ cm
   c. $\sqrt{305}$ cm
3. a. siku-siku d. tumpul
   b. siku-siku e. tumpul
   c. tumpul
5. a. $15\sqrt{2}$ cm c. $\left(60 + 30\sqrt{2}\right)$ cm
   b. $15\sqrt{2}$ cm
7. a. $\sqrt{5}$ cm c. $\sqrt{3,5}$ cm
   b. $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ cm d. $\sqrt{7,25}$ cm
9. a. 17 inci c. 120 inci^2
   b. 46 inci

Uji Kompetensi 5.2 halaman 116

1. a. $\frac{3}{5}\sqrt{10}$ cm
3. a. $\frac{2}{25}\sqrt{30.621}$ cm
   b. $\frac{1}{4}\sqrt{3.111}$ cm
   c. $\sqrt{99.64}$ cm
   d. $\frac{1}{4}\sqrt{1.599}$ cm
5. a. $\frac{5}{2}$ cm d. $\frac{2}{3}\sqrt{13}$ cm
   b. $\frac{1}{2}\sqrt{73}$ cm e. $\frac{1}{3}\sqrt{13}$ cm
   c. $\sqrt{13}$ cm

Uji Kompetensi Bab 5 halaman 118

A.

1.	d	**11.**	d
3.	c	**13.**	c
5.	d	**15.**	a
7.	d	**17.**	b
9.	a	**19.**	b

B

1. a. $r = 4$ d. $\left(16 + \sqrt{160}\right)$ cm
   b. 4 cm e. 24 cm^2
   c. 12 cm
3. a. $\frac{1}{2}\sqrt{207}$
   b. $\frac{1}{3}\sqrt{207}$
   c. 4 cm
   d. $\frac{1}{6}\sqrt{207}$
   e. 5,5 cm

Uji Kompetensi Semester 1 halaman 121

1.	b	**11.**	d	**21.**	b
3.	c	**13.**	d	**23.**	c
5.	a	**15.**	a	**25.**	c
7.	b	**17.**	d	**27.**	c
9.	c	**19.**	a	**29.**	b

Bab 6 Lingkaran

Uji Kompetensi 6.1 halaman 129

1. a. Titik pusat = titik *A*
   b. Jari-jari = garis *AD*, *AE*, dan *AF*
   c. Diameter = garis *FD*
   d. Busur *EF*, *ED*, *CD*, *CF*
   e. Tali busur = garis *CF* dan *DF*
   f. Tembereng = Daerah yang dibatasi oleh busur *CF* dan tali busur *CF*
   g. Juring = Daerah yang dibatasi oleh jari-jari *AE* dan *AF* serta busur *CF*.
   h. hipotema = garis AB
5. a. diameter = 26 cm
   b. $\overline{OD}$ = 5 cm
   c. $\overline{CD}$ = 8 cm

Uji Kompetensi 6.2 halaman 136

1. a. 18,4 cm d. 37,68 cm
   b. 25,12 cm e. 43,96 cm
   c. 31,4 cm
3. a. 70 m
   b. 35 m
5. a. 12,56 cm
   b. 18,84 cm
7. a. 19,625 cm^2 d. 153,86 cm^2
   b. 38,465 cm^2 e. 314 cm^2
   c. 78,5 cm^2
9. a. 78,5 m^2
   b. 34,54 m^2

Uji Kompetensi 6.3 halaman 141

1. a. Apotema = garis *OL*
   b. Juring Lingkaran = Daerah yang dibatasi oleh jari-jari *OP* dan *OK* serta busur *PK*
   c. Tembereng = Daerah yang dibatasi oleh busur *MN* dan ali busur *MN*
   d. Busur = *MN*, *NP*, *PK*, *KM*
3. a. 5,23 cm d. 20,933 cm
   b. 10,467 cm e. 31,4 cm
   c. 15,7 cm
5. a. 36° d. 144°
   b. 72° e. 180°
   c. 90°
7. a. $104\frac{2}{3}$ cm^2 d. $174\frac{4}{9}$ cm^2
   b. 157 cm^2 e. $418\frac{2}{3}$ cm^2
   c. $209\frac{1}{3}$ cm^2
9. a. $66\frac{2}{3}$ cm^2 c. 200 cm^2
   b. $83\frac{1}{3}$ cm^2

Uji Kompetensi 6.4 halaman 149

5. a. $x = 30°$
   b. $\angle AOB = 120°$
   c. $\angle ACB = 60°$
7. a. 70°
   b. 70°
   c. 70°
9. a. $\angle BEC = 94°$
   b. $\angle AED = 94°$
   c. $\angle AEB = 86°$
   d. $\angle DEC = 86°$

Uji Kompetensi Bab 6 halaman 152

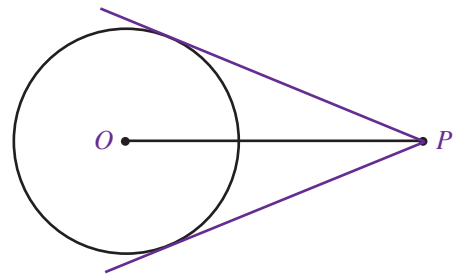
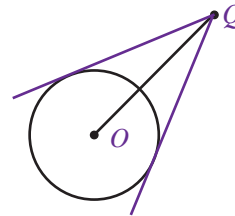
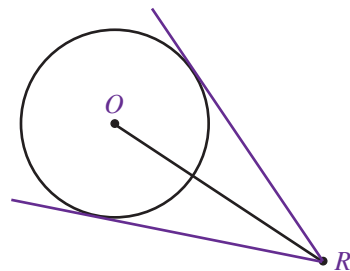
A.

1.	c	11.	-
3.	a	13.	c
5.	-	15.	b
7.	e	17.	b
9.	b	19.	c

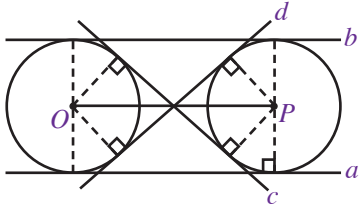
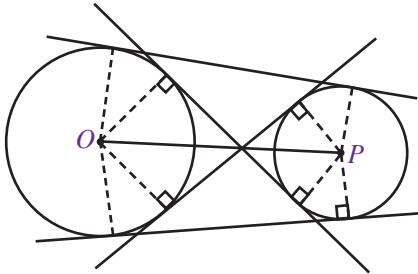
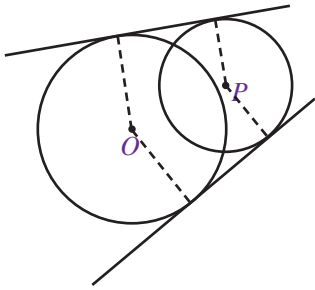
B.
1. a. K = 72 cm
   b. 154 cm^2
3. a. d = 32 cm
   b. *OC* = 7,74 cm
   c. Luas = 54,22 cm^2

Bab 7 Garis Singgung Lingkaran

Uji Kompetensi 7.1 halaman 160

1. a.

b.

c.

3. $3\sqrt{5}$ cm
5. r = 5 cm dan op = 13 cm

Uji Kompetensi 7.2 halaman 172

1. a.

b.

c.

2. CD = 24 cm
3. AB = 30 cm
7. 142,8 cm

Uji Kompetensi Bab 7 halaman 179

A.
1.	d	**11.**	a
3.	a	**13.**	a
5.	d	**15.**	b
7.	c	**17.**	c
9.	d	**19.**	b

Bab 8 Bangun Ruang Sisi Datar

Uji Kompetensi 8.1 halaman 191

1. a. *KLMN*, *OPQR*, *KLPO*, *LMQP*, *MNRQ*, *KNRO*
   b. *KL*, *LM*, *MN*, *NK*, *OP*, *PQ*, *QR*, *RO*, *KO*, *LP*, *MQ*, *NR*
   c. *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P*, *Q*, *R*
   d. *KP*, *LO*, *LQ*, *MP*, *MR*, *NQ*, *NO*, *KR*, *KM*, *LN*, *OQ*, *PR*
   e. *KQ*, *LR*, *MO*, *NP*
   f. *KLQR*, *LMRO*, *MNOP*, *NKPQ*

3 . a. 49 cm^2
   b. $7\sqrt{2}$ cm
   c. $7\sqrt{3}$ cm
   d. 98 cm^2
5. a. Ya
   b. Ya
   c. Bukan
7. 31,36 m^2
9. a. 8 cm^3
   b. 2 cm

Uji Kompetensi 8.2 halaman 198

1. a. *PQRS*, *TUVW*, *PQVT*, *QRVU*, *RSWV*, *SPTW*
   b. *PQ*, *QR*, *AS*, *SP*, *TU*, *UV*, *VW*, *WT*, *PT*, *QU*, *RV*, *SW*
   c. *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *U*, *V*, *W*
   d. *PU*, *QT*, *QV*, *RU*, *RW*, *SV*, *ST*, *PW*, *PR*, *QS*, *TV*, *UW*
   e. *PV*, *QW*, *RT*, *SU*
   f. *PQVW*, *QRWT*, *RSTU*, *SPUV*
3. $BD = FH$ = 5 cm
   b. $5\sqrt{5}$ cm
   c. 50 cm^2
7. 8 cm
9. 292 cm^2

Uji Kompetensi 8.3 halaman 207

1. a. Ya, prisma segitiga
   b. Ya, prisma segisepuluh
   c. Bukan
   d. Ya, prisma segienam
3. a. $\sqrt{29}$ cm
   b. $\sqrt{29}$ cm
   c. $\sqrt{93}$ cm
5. a. 122 cm
   b. 57 cm^2
   c. 576 cm^2
   d. 798 cm^3

7. 416 cm^3

9. a. 345 m^3 c. 15 cm^2 e. 5 cm

b. 20 cm d. 152 cm^2

Uji Kompetensi 8.4 halaman 216

1. a. limas segilima
   b. *KLMNO*, *PKL*, *PLM*, *PMN*, *PNO*, *POK*
   c. *KL*, *LM*, *MN*, *NO*, *OK*, *PK*, *PL*, *PM*, *PN*, *PO*
   d. *P*, *K*, *L*, *M*, *N*,
5. a. 169 cm
   b. 117 cm
   c. 468 cm
   d. 637 cm
7. a. 36 cm^2
   b. 60 cm^2
   c. 156 cm^3
9. a. 81 cm^2
   b. 2.400 cm

Uji Kompetensi Bab 8 halaman 219

A.

1. a	11. d
3. c	13. c
5. a	15. b
7. d	17. a
9. a	19. a

Uji Kompetensi Semester 2 halaman 222

A.

1. b	11. c	21. c
3. c	13. b	23. d
5. b	15. d	25. c
7. b	17. b	27. b
9. c	19. d	29. d

Soal Akhir Tahun

A.

1. a	11. d	21. c
3. a	13. b	23. d
5. d	15. a	25. a
7. d	17. b	27. c
9. a	19. d	29. c

B.

1. a $4x + 11$
   b. $2x - 1$
3. a. $x = 4$
   b. $y = 5$
5. a. $x = 60°$
   c. $\{(4, -5)\}$

Daftar Simbol

$\angle$	sudut
m	gradien
D	diameter
r	jari-jari
$+$	tambah; plus; positif
$-$	kurang; minus; negatif
$\times$	kali
$\div$:	bagi
$=$	sama dengan
$\neq$	tidak sama dengan
$<$	lebih kecil daripada
$>$	lebih besar daripada
$\leq$	lebih kecil atau sama dengan
$\geq$	lebih besar atau sama dengan
Δ	segitiga
$\sqrt{}$	akar kuadrat
( )	kurung
{ }	kurawal
$^\circ$	derajat
$\sqrt[3]{}$	akar pangkat tiga
$\in$	adalah anggota dari

Glosarium

A

Aljabar: perumusan aritmetika atau sistem logika yang dinyatakan dalam lambang-lambang

B

Busur: garis yang terletak pada lingkaran dan menghubungkan dua titik sebarang di lingkungan tersebut

D

Diameter: garis lurus yang menghungkan dua titik pada lengkungan dua titik sebarang di lengkungan tersebut

Diagram: gambar yang menyatakan data tertentu dan kesimpulannya digunakan untuk membentu memahami penjelasan aljabar

Diagonal: garis yang menghubungkan dua titik sudut yang tidak berdampingan

Domain: daerah asal

E

Eliminasi: melenyapkan/menghilangkan suatu variabel

F

Faktorisasi: proses suatu bilangan atas faktor-faktornya

Fungsi: relasi khusus yang memesangkan setiap anggota suatu himpunan dengan tepat suatu anggota himpunan lain

G

Garis lurus: suatu garis yang ditarik antara dua buah titik yang memiliki jarak tertentu tepat lurus

Garis singgung: suatu garis yang memotong lingkaran tepat di satu titik

Garis singgung persekutuan: garis yang tepat menyinggung dua lingkaran

Gradien: tingkat kemiringan garis atau perbanding-an ordinat dengan absis

Grafik: penggambaran suatu titik perpotongan atau suatu daerah dalam bidang cartesius

H

Himpunan: unit yang terdiri beberapa anggota

J

Jari-jari: garis dari titik pusat ke lengkungan lingkaran

Juring: luas daerah dalam lingkaran yang dibatasi oleh dua buah jari-jari lingkaran dan sebuah busur yang diapit oleh kedua jari-jari lingkaran tersebut

K

Kodomain: daerah kawan

Koefisien: bagian suku yang berupa bilangan atau konstanta

Konstanta: lambang untuk menyatakan objek yang sama dalam keseluruhan rangkaian operasi matematika atau variabel yang hanya memiliki suatu nilai

Koordinat: satu dari sehimpunan bilangan yang menyatakan letak suatu titik dlam ruang

Kubus: bangun bidang banyak yang dibatasi oleh enam sisi yang sama luas dengan dua belas rusuk yang sama panjang dan semua titik sudut sisi merupakan sudut siku-siku

L

Linear: posisi yang terletak pada suatu garis lurus

Lingkaran: kedudukan suatu titik-titik terhadap suatu titik pusat yang memiliki jarak yang sama

M

Metode: suatu cara pemecahan/penyelesaian

N

Notasi: lambang/simbol

P

Proyeksi: pembentukan bayangan suatu titik terhadap suatu bidang dengan syarat garis hubung titik dan titik hasil proyeksinya harus dengan bidang tersebut

R

Range: himpunan peta/fungsi (daerah hasil)

Relasi: hubungan antara dua himpunan yang memasangkan anggota satu himpunan dengan anggota-anggota himpunan lain

Rusuk: garis atau ruas garis yang merupakan perpotongan dua muka bidang suatu bentuk geometri atau batas suatu bentuk dalam bidang

S

Segitiga:suatu bangun datar yang memiliki tiga garis lurus dan tiga titik sudut

Substitusi: menyatakan suatu variabel dengan variabel lain

Sudut: titik perpotongan (pertemuan) dua buah garis lurus

Suku: penjelasan yang berbentuk jumlah beberapa besaran

T

Tali busur: garis lurus dalam lingkaran yang menghubungkan dua titik pada lengkungan dan tidak melalui titik pusat lingkaran

Tembereng: luas daerah dalam lingkaran yang dibatasi oleh busur dan tali busur

Teorema: kesimpulan umum yang dikemukakan untuk dibuktikan berdasarkan hipotesis tertentu yang diberikan

V

Variabel: lambang suatu bilangan yang belum diketahui nilainya

Indeks

Daftar Pustaka

Bigelow, Paul and Graema Stone. 1996. *New Course Mathematics Year 9 Advanced*. Victoria: Macmillan Education Australia PTY LTD.

Bin, Oh Teik. 2003. *The Essential Guide to Science and Mathematics in English*. Selangor: Shinano Publishing House.

BSNP. 2006. *Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar 2006 Mata Pelajaran Matematika Sekolah Menengah Pertama/Madrasah Tsanawiyah*. Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional

Farlow, Stanley J.1994. *Finite Mathematics and its Applications*. Singapore: McGraw-Hill Book Co.

Hong, Tay Choong, Mark Riddington and Martin Grier. 2001. *New Mathematics Counts for Secondary Normal* (*Academic*) *4*. Singapore: Times Publishing Group.

Negoro, ST dan B. Harahap. 1998 *Ensiklopedia Matematika*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

Nightingale, Paul. 2001. *Vic Maths 6*. Australia: Nightingale Press.

O'Brien, Paul. 1995. *Understanding Math Year 11*. NSW: Turramurra.

O'Brien, Harry.2001. *Advanced Primary Maths 6*. Australia: Horwitz Martin Education.